

Олимпиада

1. Числа от 1 до 9 расставили в клетки таблицы 3×3 так, что сумма чисел на одной диагонали равна 10, а на другой — 23. Чему равна сумма четырёх чисел в углах таблицы?
2. Существует ли функция $f(x)$, заданная при всех вещественных x и принимающая вещественные значения, такая что для всех целых x верно следующее соотношение

$$f(-x^2 + 3x + 1) = f^2(x) + 2?$$

3. В классе учится 17 школьников. На контрольной работе по математике им было предложено 12 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины учеников класса. Докажите, что обязательно найдутся три школьника, в объединении решившие все задачи.
4. Сколько существует таких натуральных чисел n , для которых при делении 10^6 на n неполное частное оказывается больше остатка?
5. Вписанная сфера ω касается граней BCD , CDA , DAB , ABC тетраэдра $ABCD$ в точках A' , B' , C' , D' соответственно. Отрезок TA' — диаметр сферы ω . Прямые TA , TB' , TC' , TD' пересекают плоскость BCD в точках O , X , Y , Z соответственно. Докажите, что точка O — центр описанной окружности треугольника XYZ .