

## Олимпиада

1. Числа от 1 до 9 расставили в клетки таблицы  $3 \times 3$  так, что сумма чисел на одной диагонали равна 10, а на другой — 23. Чему равна сумма четырёх чисел в углах таблицы?
2. Существует ли функция  $f(x)$ , заданная при всех вещественных  $x$  и принимающая вещественные значения, такая что для всех целых  $x$  верно следующее соотношение

$$f(-x^2 + 3x + 1) = f^2(x) + 2?$$

3. В классе учится 17 школьников. На контрольной работе по математике им было предложено 12 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины учеников класса. Докажите, что обязательно найдутся три школьника, в объединении решившие все задачи.
4. Сколько существует таких натуральных чисел  $n$ , для которых при делении  $10^6$  на  $n$  неполное частное оказывается больше остатка?
5. Вписанная сфера  $\omega$  касается граней  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  тетраэдра  $ABCD$  в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  соответственно. Отрезок  $TA'$  — диаметр сферы  $\omega$ . Прямые  $TA$ ,  $TB'$ ,  $TC'$ ,  $TD'$  пересекают плоскость  $BCD$  в точках  $O$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно. Докажите, что точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $XYZ$ .