Геометрия в стороне от мейнстрима

1. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке R. На отрезках AR, DR нашлись такие точки U и V соответственно, что $\angle BUD = \angle AVC$. Докажите, что четырёхугольник $BCVU$ — вписанный.

2. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R. Известно, что среди сторон четырёхугольника $ABCD$ сторона AB — наименьшая. Докажите, что $\angle ARB \geqslant 90^\circ$.

3. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что $\angle ABE = \angle ADE = \frac{1}{2}\angle ACE$. Кроме того, $\angle BCA = \angle ECD$. Докажите, что $\angle ABC = \angle CED$.

4. На сторонах AB, AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки F, E соответственно. Докажите, что из отрезков BE, CF, EF можно составить треугольник.

5. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N соответственно так, что $\angle KLA = \angle LAM = \angle AMN = 45^\circ$. Отрезки AL и AM пересекают отрезок KN в точках P и Q соответственно. Докажите, что $S_{\triangle APQ} = S_{\triangle KLP} + S_{\triangle NMQ}$.

6. Дан треугольник XBC. Различные точки A_H , A_I , A_M таковы, что точка X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если прямые A_HA_M и BC параллельны, то точка A_I — середина отрезка A_HA_M.

7. На описанной окружности треугольника ABC отмечена произвольная точка T. Точки D, E, F — середины отрезков BC, CA, AB соответственно. Прямые TD, TE, TF повторно пересекают окружность (ABC) в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что площадь треугольника, образованного прямыми AX, BY, CZ, не зависит от выбора точки T.