

## Добрый разнойбой

1. 10 спортсменов провели турнир по настольному теннису в один круг. Докажите, что сумма квадратов количеств их побед равна сумме квадратов количеств их поражений. (Ничьих не бывает.)
2. Ребра графа, степени всех вершин которого равны 5, раскрасили в три цвета так, что по ребрам каждого цвета можно от любой вершины добраться до любой. Каким может быть число вершин этого графа?
3. В языке жителей Банановой Республики количество слов превышает количество букв в их алфавите. Докажите, что найдется такое натуральное  $k$ , для которого можно выбрать  $k$  различных слов, в записи которых используется ровно  $k$  различных букв.
4. За одну операцию из натурального числа  $n$  можно получить одно из чисел  $2n + 1$ ,  $3n + 2$  и  $5n + 4$ . Числа  $m$  и  $n$  называются *похожими*, если за несколько операций (возможно, за разное число) из чисел  $m$  и  $n$  можно получить одно и то же число. Найдите количество натуральных чисел, меньших 2009 и похожих на него.
5. На плоскости отмечено конечное число точек, каждая покрашена в синий, желтый или зеленый цвет. На любом отрезке, соединяющем одноцветные точки, нет точек этого же цвета, но есть хотя бы одна другого цвета. Каково максимально возможное число всех точек?
6. Докажите, что при всех натуральных  $n$  уравнение  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = n^2$  имеет хотя бы один рациональный корень, принадлежащий интервалу  $(1, 2)$ .
7. Решите в целых числах уравнение  $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$ .
8. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовём клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?
9. В компании из ста человек среди любых десяти есть трое попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать восьмерых из них так, чтобы любой из оставшихся был знаком с кем-то из этих восьмерых. (Знакомство взаимно.)