Алгебра и ТЧ

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots c$ и $c^3 \vdots a$. Докажите, что $(a+b+c)^{13} \vdots abc$.

2. Числовое множество M, содержащее 2003 различных числа, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.

3. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha f(x) + \beta g(x) > 0$.

4. Докажите неравенство $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при всех $0 < x < \pi/2$.

5. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \ldots + a_{n+9}$ при любом натуральном n?

6. Каких точных квадратов, не превосходящих 10^{20}, больше: тех, у которых семнадцатая с конца цифра – 7, или тех, у которых семнадцатая с конца цифра – 8?

7. Докажите, что существует ровно одна последовательность целых чисел, удовлетворяющая свойствам: $a_1 = 1$, $a_2 > 1$, $a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$ при всех натуральных n.