Начало топологии в $\mathbb{R}^n$

Определение. Множество S называется *открытым*, если с каждой своей точкой $x \in S$ оно содержит открытый шар с центром в x. Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

1. Про каждое из перечисленных множеств ответьте, является ли оно открытым и является ли оно замкнутым.
(a) Пустое множество, отрезок, интервал, полуинтервал, окружность, треугольник;
(b) график функции $y = x^2$, решения неравенств $y^2 - x^2 < 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 5$;

2. **(a)** Докажите, что объединение конечного числа открытых множеств открыто;
(b) Докажите, что пересечение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
(c) Верны ли утверждения двух предыдущих пунктов без предположения о том, что множеств конечное число?

3. Докажите, что любое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения шаров

Факт (далее можно его использовать). У любого ограниченного множества X действительных чисел существует точная верхняя грань, т. е. такое число c, что $c \geqslant x \quad \forall\, x \in X$ и $\forall\, b < c \ \ \exists x \in X \,:\, x > b$.

4. Доказать следующий факт. Последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.

Окрестностью точки $x \in \mathbb{R}^n$ называется любое открытое множество, содержащее x.

Последовательность $x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}$ называется *сходящейся* к точке x, если для любой окрестности U точки x найдётся такое $N \in \mathbb{R}$, что при любом $n \geqslant N$ $x_n \in U$.

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт.

5. Последовательность точек в $\mathbb{R}^n$ сходится к точке тогда и только тогда, когда она сходится к ней покоординатно.

6. Пусть $f(x, y, z)$ – непрерывное отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$. Пусть $Z \subset \mathbb{R}^3$ – это множество точек, в которых f принимает значение 0. Докажите, что Z замкнуто.

7. Привычное определение функции, непрерывной на отрезке/интервале (существует предел в каждой точке, и он совпадает со значением функции в этой точке), согласуется с определением непрерывного отображения, данным выше.

8. Несколько жуков бегают по плоскости. То есть задано несколько непрерывных отображений $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; говорим, что i-й жук в момент времени t находится в точке $f_i(t)$. Известно, что в некоторый момент времени t_0 они находятся в вершинах выпуклого многоугольника. Докажите, что найдётся такое $\tau > 0$, что при любом $t \in [t_0, \tau]$ они находятся в вершинах выпуклого многоугольника.

Замыканием множества X называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих X. Стандартное обозначение для замыкания: $\overline{X}$.

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* S, если любая окрестность точки x содержит точку множества S, отличную от x.

Точка называется *предельной точкой последовательности*, если найдётся подпоследовательность, сходящаяся к этой точке.

9. **(a)** Замыкание $\overline{X}$ произвольного множества X замкнуто и является наименьшим замкнутым множеством, содержащим X.
(b) Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.
(c) Множество $\overline{X}$ получается из X добавлением всех предельных точек множества X.

10. **(a)** Всегда ли $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cap Y}$?
(b) Всегда ли $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$?

11. На плоскости даны многоугольник и несколько треугольников. Известно, что любая точка многоугольника, не лежащая ни на одной из его диагоналей, покрыта хотя бы одним треугольником. Докажите, треугольники покрывают весь многоугольник.