ТЧ наносит ответный удар

1. Для каждого натурального n найдите наибольший общий делитель чисел $n! + 1$ и $(n+1)!$.

2. Даны натуральные числа a, b, k. Для последовательности натуральных чисел $\{x_n\}$ выполнено $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$. Тогда существует натуральное N такое, что при $n > N$ все числа x_i, делящиеся на k, будут лежать через равные промежутки.
   (a) Докажите это утверждения для случая, когда k – простое.
   (b) Из предыдущего пункта выведите случай произвольного k.
   (Оба пункта можно сдавать независимо друг от друга.)

3. Число 3^{2019} начинается с двойки и содержит ещё 963 цифры. Рассмотрим десятичную запись числа $1/3^{2019}$.
   (a) Найдите длину её периода.
   (b) Какое наибольшее число единиц подряд в ней встречается?

4. Prove that there are infinitely many positive integers n such that $n^2 + 1$ has a prime divisor greater than $2n + \sqrt{2n}$.

5. Для каких чётных натуральных чисел d существует константа $c > 0$ такая, что любой приведённый многочлен $f(x)$ степени d с целыми коэффициентами, не имеющий вещественных корней, удовлетворяет при всех $x \in \mathbb{R}$ неравенству $f(x) > c$?