

## Медиана в прямоугольном треугольнике

И тут мне чудится, что на меня ехидно смотрит какая-то гипотенуза и говорит:  
«Выучишь, Валечка, мою теорему, будет тебе счастье, а не выучишь – быть беде».

И. С. Горюнова, Чебудушка

**Факт.** В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

**Факт.** Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой проведена, то угол, из которого выходит эта медиана – прямой.

1. В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AC$  и  $BC$ , а  $CH$  – высота. Докажите, что периметр четырехугольника  $HNCM$  равен  $AC + BC$ .
2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  отрезки  $BM$  и  $AH$  – медиана и высота, соответственно. Известно, что  $2\angle MBC = \angle MCB$ . Найдите сторону  $AC$ , если  $BH = 4$ .
3. В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $\angle CAD = \angle CBD$ .
  - (a) Докажите, что прямая, содержащая медиану  $OM$  треугольника  $BOC$ , перпендикулярна прямой  $AD$ .
  - (b) Докажите, что прямая, содержащая высоту  $OH$  треугольника  $OBC$ , делит отрезок  $AD$  пополам.
4. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . На отрезке  $AB$  отметили точку  $P$  так, что  $CP = BC$ . Оказалось, что отрезок  $CP$  пересекает биссектрису  $AK$  в её середине. Найдите углы треугольника  $ABC$ .
5. В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $B$  и  $D$  прямые, а диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны. Докажите, что одна из диагоналей делит другую пополам.
6. Дан параллелограмм  $ABCD$  с тупым углом  $C$ . Точка  $M$  – середина  $AB$ .
  - (a) Оказалось, что  $MC$  перпендикулярна  $CD$ . Докажите, что  $AC = AD$ .
  - (b) Оказалось, что  $AC = AD$ . Докажите, что  $MC$  перпендикулярна  $CD$ .
7. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  проведена биссектриса  $CD$ . Прямая, проходящая через точку  $D$  перпендикулярно  $DC$ , пересекает  $AC$  в точке  $E$ . Докажите, что  $EC = 2AD$ .

**Если вы решили все, есть добавка!**