

Выигрышные и проигрышные позиции

- Всё в порядке, – сказал Форд, – только не паникуй!
- Кто сказал, что я паникую? Я просто ещё не освоился! Подожди, вот я освоюсь, и пойму, что к чему. Вот тогда я и начну паниковать

Автостопом по галактике

Будем рассматривать игры без ничей. Среди позиций в игре будем выделять два типа:

- **выигрышная**, если игрок, оказавшийся в этой позиции, имеет выигрышную стратегию.
- **проигрышная**, если игрок, оказавшийся в этой позиции, стратегии не имеет, но ее имеет его соперник.

Осознайте!

Из проигрышных позиций можно пойти только на выигрышные, а из выигрышных **хотя бы один** ход (но, быть может, не все) ведет на проигрышную позицию.

Уровень 1. Проставляем В и П

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×9 . Фишка стоит в одной из клеток. Илья и Кирилл по очереди передвигают ее на любое количество клеток либо вправо, либо вверх, либо вправо-вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний. При каких положениях фишки выигрывает Кирилл?
2. Маша и Вика играют в игру. Имеется две кучки из 6 карамелек. За один ход можно брать не более 2 карамелек из одной кучки, либо по одной карамельке из каждой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Маша начинает. Кто выигрывает при правильной игре?

Уровень 2. Разбиваем позиции на группы

3. На доске написано число 2458. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру. Выигрывает тот, после чьего хода на доске будет написан ноль. Кто выиграет при правильной игре?
4. Маша и Миша играют в игру. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое меньшее натуральное число. Выигрывает тот, кто получит 512. Начинает Миша. Кто выигрывает при правильной игре?

Уровень 3. Позиции подскажут стратегию

5. На доске написано число 60. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей. Если при этом получается ноль, игрок проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
6. Есть две кучки конфет по (a) 5 и 4; (b) m и n конфет. Игроки ходят по очереди. Делая ход, игрок съедает все конфеты из одной кучки, а другую кучку делит на две (по своему выбору; в каждой из них должно остаться хотя бы по конфете). Если сделать ход нельзя (это бывает, когда в обеих кучках по одной конфете), он проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Уровень 4. Если бы у другого игрока была выигрышная стратегия...

Такой способ доказывать существование стратегии «от противного» называется передачей хода.

7. Игра в «двойные шахматы» ведется также, как и в обычные, только игроки делают по 2 хода за раз. Докажите, что в этой игре у второго игрока не может быть выигрышной стратегии.
8. Выписаны в ряд числа от 1 до 2020. В свой ход игрок вычеркивает любое из записанных чисел вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у первого игрока есть способ играть так, чтобы всегда выигрывать.
9. Никита и Даниил играют в следующую игру. Имеется 40^{444} конфет. За один ход разрешается взять не более, чем $\frac{1}{100}$ от оставшихся конфет. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Даниил. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?