Делимость-3. Остатки

Определение. *Число r называется остатком при делении на b, если $a = bq + r$, где a, b, q, r- целые и $0 \leq r < b$.*

Действия с остатками. Пусть число a_1 дает при делении на b остаток r_1, число a_2 – остаток r_2. Тогда
а) (сложение остатков) Число $a_1 + a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1 + r_2$.
б) (вычитание остатков) Число $a_1 - a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1 - r_2$.
в) (умножение остатков) Число a_1a_2 при делении на b дает тот же остаток, что и число r_1r_2.

1. Разделите с остатком
   а) -15 на 7; б) -224 на 9.
2. Найдите остаток при делении
   а) $2010 \cdot 2012 \cdot 2014 + 2019^3$ на 7; б) 9^{2019} на 8; в) 9^{2019} на 10.
3. Найдите остаток при делении на 7 а) 6787^{34} ; б)143^{45}.
4. Какие остатки при делении на а)3; б) 4 может давать квадрат целого числа?
5. Докажите, что нельзя составить квадрат натурального числа, используя только цифры 2, 3, 7 и 8.
6. Найдите остаток при делении на 7 числа $100^{100} - 30^{30}$.
7. Число дает при делении на 8 остаток 5, а при делении на 5 остаток 2. Какие это могли быть числа?
8. а) Какие остатки может давать куб целого числа на 7? А на 9?
   б) Докажите, что число 108 нельзя представить в виде суммы двух точных кубов.
   в) $(a^3 + b^3 + c^3)$ делится на 63. Докажите, что abc делится на 21.
9. Назовем натуральное n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 2501. Докажите, что среди $1, \ldots, 2500$ четное количество удобных чисел.
10. а)Может ли число $a^2 + b^2 + c^2$ делится на 5, если ни одно из чисел a, b, c не делится на 5?
    б)Докажите, что для любого целого числа A по крайней мере одно из чисел $A^3 + A$ и $A^3 - A$ делится на 10.
11. Пусть $P_n = p_1p_2 \ldots p_n$ — произведение первых n простых чисел $(n > 1)$. Докажите, что
    а) $P_n - 1$ б) $P_n + 1$ не является полным квадратом.
12. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Домашнее задание

13. Найдите последнюю цифру а) 1763^{345} б) 3567^{245}
14. Докажите, что $n(n-1)(n+1)$ делится на 6 для любого натурального n.

Делимость-3. Остатки

Определение. *Число r называется остатком при делении на b, если $a = bq + r$, где a, b, q, r- целые и $0 \leq r < b$.*

Действия с остатками. Пусть число a_1 дает при делении на b остаток r_1, число a_2 – остаток r_2. Тогда
а) (сложение остатков) Число $a_1 + a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1 + r_2$.
б) (вычитание остатков) Число $a_1 - a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1 - r_2$.
в) (умножение остатков) Число a_1a_2 при делении на b дает тот же остаток, что и число r_1r_2.

1. Разделите с остатком
   а) -15 на 7; б) -224 на 9.
2. Найдите остаток при делении
   а) $2010 \cdot 2012 \cdot 2014 + 2019^3$ на 7; б) 9^{2019} на 8; в) 9^{2019} на 10.
3. Найдите остаток при делении на 7 а) 6787^{34} ; б)143^{45}.
4. Какие остатки при делении на а)3; б) 4 может давать квадрат целого числа?
5. Докажите, что нельзя составить квадрат натурального числа, используя только цифры 2, 3, 7 и 8.
6. Найдите остаток при делении на 7 числа $100^{100} - 30^{30}$.
7. Число дает при делении на 8 остаток 5, а при делении на 5 остаток 2. Какие это могли быть числа?
8. а) Какие остатки может давать куб целого числа на 7? А на 9?
   б) Докажите, что число 108 нельзя представить в виде суммы двух точных кубов.
   в) $(a^3 + b^3 + c^3)$ делится на 63. Докажите, что abc делится на 21.
9. Назовем натуральное n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 2501. Докажите, что среди $1, \ldots, 2500$ четное количество удобных чисел.
10. а)Может ли число $a^2 + b^2 + c^2$ делится на 5, если ни одно из чисел a, b, c не делится на 5?
    б)Докажите, что для любого целого числа A по крайней мере одно из чисел $A^3 + A$ и $A^3 - A$ делится на 10.
11. Пусть $P_n = p_1p_2 \ldots p_n$ — произведение первых n простых чисел $(n > 1)$. Докажите, что
    а) $P_n - 1$ б) $P_n + 1$ не является полным квадратом.
12. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Домашнее задание

13. Найдите последнюю цифру а) 1763^{345} б) 3567^{245}
14. Докажите, что $n(n-1)(n+1)$ делится на 6 для любого натурального n.