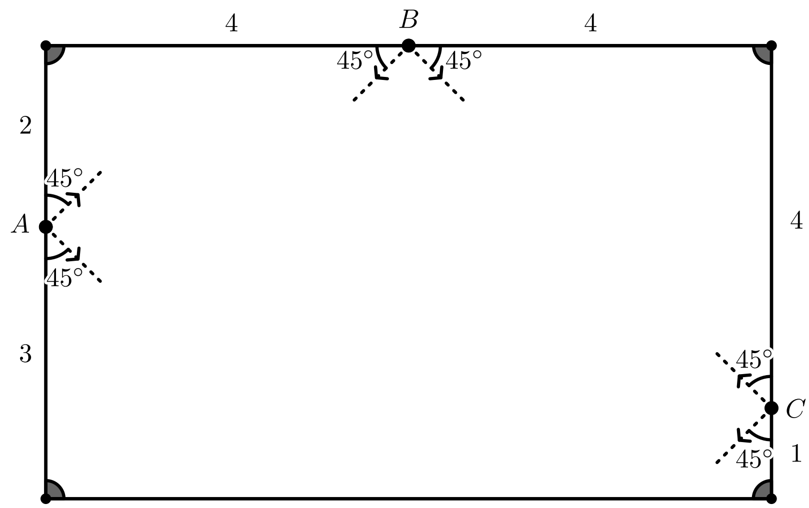
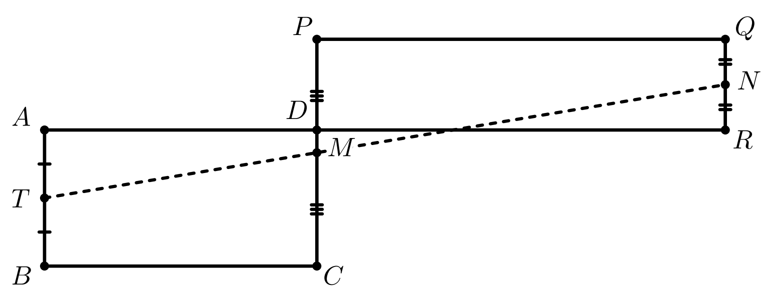
VI Иранская олимпиада по геометрии
13 сентября 2019 г.

Начинающие

1. Дан прямоугольный стол размером 8×5, в углах которого расположены лунки. Шар по очереди запускают из точек A, B и C в шести указанных на рисунке направлениях. В каких случаях шар попадёт в одну из лунок после не более чем 6 отражений? (Шар отражается от сторон прямоугольника по закону «угол падения равен углу отражения».)



2. Два прямоугольника $ABCD$ и $PQRD$ одинаковой площади, соответствующие стороны которых параллельны, расположены, как показано на рисунке. Точки N, M и T — середины отрезков QR, PC и AB соответственно. Докажите, что точки N, M и T лежат на одной прямой.



3. На плоскости проведены $n > 2$ прямых общего положения, то есть никакие две прямые не параллельны и никакие три прямые не проходят через одну точку. Точки пересечения этих прямых отметили, после чего все прямые стёрли, оставив при этом отмеченные точки. Неизвестно, каким двум прямым принадлежит каждая из отмеченных точек. Всегда ли можно однозначно узнать, какая точка какой прямой принадлежит, и восстановить исходные прямые?

4. Дан четырёхугольник $ABCD$ такой, что
$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ, \quad AB = BD - AC.$$
Обозначим через E точку пересечения прямых AB и CD. Докажите, что $\angle ADB = 2\angle BEC$.

5. Назовём диагональ выпуклого многоугольника (т.е. многоугольника, все углы которого меньше 180°) *срединной*, если она делит пополам и площадь, и периметр многоугольника. Какое наибольшее число срединных диагоналей может быть у выпуклого пятиугольника?

Продолжительность олимпиады — 4 часа 30 минут.

Продолжающие

1. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B, причём точка O_1 лежит на ω_2. На окружности ω_1 выбрана произвольная точка P. Прямые BP, AP и O_1O_2 вторично пересекают ω_2 в точках X, Y и C соответственно. Докажите, что четырёхугольник $XPYC$ является параллелограммом.

2. Найдите все четырёхугольники $ABCD$ такие, что все четыре треугольника ABC, ABD, ACD и BCD попарно подобны.

3. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку P. Касательная к ω_1, проведённая в точке P, вторично пересекает ω_2 и ω_3 в точках $P_{1,2}$ и $P_{1,3}$ соответственно. Точки $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ и $P_{3,2}$ определяются аналогично. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ и $P_{3,1}P_{3,2}$ пересекаются в одной точке.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка K на прямой AD такова, что $BK = AB$. Пусть P — произвольная точка на прямой AB. Серединный перпендикуляр к отрезку PC пересекает описанную окружность треугольника APD в точках X и Y. Докажите, что описанная окружность треугольника ABK проходит через ортоцентр треугольника AXY.

5. Угол A треугольника ABC равен 60°. Точки E и F — основания биссектрис углов B и C соответственно. Точки P и Q таковы, что четырёхугольники $BFPE$ и $CEQF$ являются параллелограммами. Докажите, что $\angle PAQ > 150^\circ$. (Рассматривается угол PAQ, который не содержит сторону AB треугольника.)

Продолжительность олимпиады — 4 часа 30 минут.

Профессионалы

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На касательной к окружности ω_1, проведённой в точке A, выбрана такая точка C, что $\angle ABC = 90°$. Через точку C проведена прямая ℓ, которая пересекает ω_2 в точках P и Q. Прямые AP и AQ вторично пересекают ω_1 в точках X и Z соответственно. Пусть Y — основание перпендикуляра из точки A на прямую ℓ. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

2. Верно ли, что в любом выпуклом n-угольнике, $n > 3$, существует вершина и выходящая из неё диагональ такие, что диагональ образует острые углы с обеими сторонами, выходящими из этой вершины?

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках X и Y. Прямая AB является общей внешней касательной к этим окружностям, причём точка A лежит на ω_1, а B — на ω_2. Касательные к ω_1 и ω_2, проведённые в точке X, пересекают прямую O_1O_2 в точках K и L соответственно. Прямая BL вторично пересекает ω_2 в точке M, а прямая AK вторично пересекает ω_1 в точке N. Докажите, что прямые AM, BN и O_1O_2 пересекаются в одной точке.

4. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Γ. Точка M — середина отрезка BC, точка N — середина дуги $\overset{\frown}{BC}$ окружности Γ (не содержащей точку A). На Γ выбраны такие точки X и Y, что $BX \parallel CY \parallel AM$. На отрезке BC нашлась такая точка Z, что описанная окружность треугольника XYZ касается прямой BC. Обозначим описанную окружность треугольника ZMN через ω. Прямая AM вторично пересекает ω в точке P. Точка K на ω такова, что $KN \parallel AM$. Обозначим через ω_b окружность, проходящую через точки B, X и касающуюся прямой BC, а через ω_c — окружность, проходящую через точки C, Y и касающуюся прямой BC. Докажите, что окружность с центром в точке K и радиусом KP касается 3 окружностей: ω_b, ω_c и Γ.

5. Дана парабола Δ с фокусом H. На Δ выбираются точки A, B и C такие, что ортоцентр треугольника ABC совпадает с точкой H. Докажите, что у всех таких треугольников ABC одинаковый радиус вписанной окружности.

Продолжительность олимпиады — 4 часа 30 минут.