Серия 13. Перестановки

1. Придумайте две перестановки, такие, что их композициями можно получить любую перестановку

2. Нескольким детям дали по карандашу одного из трех цветов. Дети как-то поменялись карандашами, после чего у каждого оказался не тот карандаш, который был у него вначале. Докажите, что цвета карандашей могли быть такими, что у каждого вначале и в конце карандаши были разных цветов.

3. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

4. Найдите число перестановок a_1, a_2, $\ldots$, a_n множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, таких, что для любого $i > 1$ найдётся $j < i$, что $|a_i - a_j| = 1$.

5. Обозначим за p_k количество перестановок элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, в которых ровно k неподвижных элементов. Докажите, что

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot p_i = n!.$$

6. Доказать, что количество перестановок с k циклами равно количеству способов выстроить числа от 1 до n в ряд, чтобы ровно k было больше всех предыдущих.

7. В библиотеке n журналов размещены на k полках. На каждой полке первый журнал был переставлен за последний журнал этой же полки. Библиотекарь за одну операцию меняет местами два произвольных журнала (возможно на разных полках). Докажите, что наименьшее число операций, которое потребуется библиотекарю, для расстановки в исходном порядке равно $n - k$.

8. Существует ли такая функция $f(x)$, что $f(f(x)) = x^2 - 11$?

9. Сто мудрецов с разными именами взяли в плен. Мудрецам предлагается пройти следующее испытание. Их имена разложат случайным образом по 100 сундукам (так что любая перестановка равновероятна). Далее их будут запускать по одному в комнату с сундуками, где каждый из них сможет открыть последовательно до 50 сундуков. Если каждый из них найдёт своё имя, то их всех отпустят, иначе всех казнят. Докажите, что у мудрецов существует стратегия, по которой они выиграют с вероятностью хотя бы $\frac{1}{4}$.