Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **23.09.2019**

Серия 4. Трансфигурация

Трансфигурация (англ. Transfiguration; буквально — «видоизменение», «преображение») — дисциплина, изучающая магические способы превращения одних предметов в другие, неживых предметов в живые и наоборот, а также одни живые объекты в другие. Частным случаем трансфигурации является создание предметов из ничего или их исчезновение. Предмет крайне сложный и требующий определённых магических сил и строгой концентрации. Для трансфигурации требуется волшебная палочка и знание соответствующей формулы

Harry Potter Wiki

1. Найдите натуральные числа $a_1, a_2, \cdots, a_{18}$, такие, что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{18} = 2019$, и для всех $3 \le k \le 18$ найдутся такие $1 \le i < j < k$, что $a_k = a_i + a_j$.

2. Найдите все целые a и b такие, что

$$(19a + b)^{18} + (a + b)^{18} + (a + 19b)^{18}$$

— полный квадрат

3. Пусть p, q — простые числа. Докажите, что если $p + q^2$ является точным квадратом, то $p^2 + q^n$ не будет точной n-й степенью при любом натуральном n.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных x, y, z, для которых сумма цифр числа $4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz$ не больше 2

5. Решите в натуральных числах уравнение

$$a^2 + b + 3 = (b^2 - c^2)^2.$$

6. Решите в натуральных числах уравнение $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$.

7. a, b и c — действительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что не более двух чисел из

$$2a - \frac{1}{b},\ 2b - \frac{1}{c},\ 2c - \frac{1}{a}$$

больше, чем 1.

8. Определите все натуральные n такие, что $3^n + n^2 + 2019$ является полным квадратом.

9. Петя и Вася решили поиграть с многочленом $P(x) = 1 + x^{444}$. Они по очереди прибавляют к многочлену x^k, где натуральное $k \in [0, 444]$. Начинает Петя. Если после хода Васи существует $t \in \mathbb{R}$ такое, что $P(t) < 0$, то Вася проиграет. Докажите, что Вася может играть так, что никогда не проиграет.

10. Докажите, что при $a + b + c \geqslant 3$ имеет место неравенство $a^4 + b^3 + c^2 \geqslant a^3 + b^2 + c$.