

Серия 31. Гармонический ряд

Гармония — это сочетание
противоположностей.

Аристотель

Назовём ряд

$$H(m, n) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

гармоническим.

1. Докажите, что $H(m, n)$ не является целым ни при каких различных m и n .
2. Пусть $H(m, n) = \frac{p}{q}$ и $m + n$ нечётно. Докажите, что $m + n$ делит p .
3. Дано выражение

$$S = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1993006}}.$$

Докажите, что $S > 1001$.

4. Пусть p, q — натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Докажите, что p делится на 1979.

5. Пусть

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020},$$

$$B = \frac{1}{1011 \cdot 2020} + \frac{1}{1012 \cdot 2019} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 1011}.$$

Вычислите A/B .

6. Пусть $m > 1$ — натуральное число. Докажите, что $1/m$ можно представить в виде суммы нескольких последовательных слагаемых ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$.
7. Докажите, что при простых $p \geq 5$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$