Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **23.09.2019**

Серия 3. Теорема Кэзи

Ab hoc et ab hac

0. Пусть α, β, γ, δ — четыре произвольные окружности. Обозначим символом $t_{\alpha\beta}$ (соответственно $t_{\beta}\gamma$, $t_{\gamma}\delta$ и т.д.) длину общей внешней касательной, проведённой к окружностям α и β (соответственно β и γ, γ и δ и т.д.). Тогда равенство

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}$$

выполняется тогда и только тогда, когда существует окружность ω, касающаяся всех четырёх данных окружностей. (Докажите это утверждение в одну сторону в том случае, когда все четыре окружности лежат вне окружности ω.)

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$; CD — высота, проведённая к AB. ω — окружность, описанная вокруг $\triangle BCD$; ν — окружность, касающаяся окружности ω и отрезков AD и AC в точках M и N соответственно.
а) Докажите, что $BD \cdot CN + BC \cdot DM = CD \cdot BM$;
б) Докажите, что $BM = BC$.

2 (теорема Фейербаха). а) Докажите, что окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной окружности того же самого треугольника;
б) Докажите, что окружность девяти точек произвольного треугольника касается вневписанных окружностей того же самого треугольника.

3. Пусть BC — хорда окружности Γ; S_1 и S_2 — дуги, которые стягивает хорда BC. Пусть M — середина S_2. Рассмотрим все окружности Ω, которые касаются S_1 и BC. Докажите, что длины касательных, проведённым из M к Ω, равны.

4. Окружности Ω_1 и Ω_2 внешне касаются в точке I и обе касаются внутренним образом окружности Ω. Общая внешняя касательная к Ω_1 и Ω_2 пересекает окружность Ω в точках B и C, а внутренная общая касательная — в точке A. Докажите, что I — инцентр $\triangle ABC$.

5. Пусть Γ — окружность, описанная вокруг $\triangle ABC$; Ω — окружность, касающаяся Γ, а также AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина PQ — инцентр треугольника ABC.

6. Пусть Γ — окружность, описанная вокруг $\triangle ABC$; $D \in BC$. Пусть окружности Ω_1 и Ω_2 касаются прямых AD и BC и внешне касаются окружности Γ. Докажите, что инцентр треугольника ABC b центры Ω_1 и Ω_2 лежат на одной прямой.

7. Γ — описанная окружность остроугольного треугольника ABC. Пусть L — касательная к окружности Γ; L_a, L_b, L_c получаются из L отражением относительно сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми L_a, L_b, L_c касается окружности Γ.