Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **12.03.2020**

Серия 34. Московский разнобой

1. Имеются чашечные весы, которые находятся в равновесии, если разность масс на их чашах не превосходит 1 г, а также гири массами $\ln 3, \ln 4, \ldots, \ln 79$ г. Можно ли разложить все эти гири на чаши весов так, чтобы весы находились в равновесии?

2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти $(x > 0, y > 0)$ под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

3. Сравните числа

$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2013^3}\right) \qquad \text{и} \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

4. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\frac{\pi n}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{2015\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

5. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, ещё один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

6. У повара в подчинении десять поворят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного из нескольких поворят на дежурство, а каждый из дежурных поворят уносят с работы о одному пирожному каждому своему неработающему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружат между собой, а кто нет?

7. Пусть $A = \sum\limits_{n=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{n}}$, а $B = \sum\limits_{n=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{n}}$. Докажите, что $A = (\sqrt{2}+1)B$.