Серия 29. Немного анализа

1. Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое действительное значение ровно 3 раза?

2. О функции $f(x)$, заданной на всей действительной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой.

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех x, y, $z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geqslant 3f(x+2y+3z).$$

4. Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные 2^n слов, состоящих из n букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение n множителей, исправив каждую букву А на x, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от x. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0; 1]$ функцию от x.

5. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f'(x)g'(x) \geqslant |f(x)| + |g(x)|$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что произведение $f(x)g(x)$ равно квадрату некоторого трёхчлена.

6. Докажите, что если числа x, y, z при некоторых значениях p и q являются решениями системы

$$y = x^n + px + q, \qquad z = y^n + py + q, \qquad x = z^n + pz + q,$$

то выполнено неравенство

$$x^2y + y^2z + z^2x \geqslant x^2z + y^2x + z^2y.$$

Рассмотрите случаи а) $n = 2$; б) $n = 2020$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y, \\ \sin y - \sin z = z - y, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

8. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b. \end{cases}$$

имеет два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

9. Докажите неравенство

$$\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\right)^{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1} \cdot \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{b_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n}.$$

при положительных a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n.