Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **19.12.2019**

Серия 21. Уравнения Маркова

0. Пусть (a, b, c) — натуральное решение уравнения Маркова $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. С помощью теоремы Виета найдите еще одно решение с теми же b и c.

1. Докажите, что любое решение уравнения Маркова соединяется цепочкой соседних решений с решением $(1, 1, 1)$.

2. Докажите, что по каждому решению уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ при $k > 3$ можно построить решение с меньшей максимальной координатой. Выведите отсюда, что это уравнение не имеет решений.

3. Докажите, что координаты любого решения уравнения Маркова попарно взаимно просты.

4. Решение обобщенного уравнения Маркова $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$ называется корневым, если $2x_n > kx_1 \ldots x_{n-1}$. Докажите, что если у уравнения есть решение, то есть и корневое решение.

5. Приведите пример обобщенного уравнения Маркова степени выше 2 с несколькими (хотя бы двумя) корневыми решениями.

6. Докажите, что деревья, образованные корневыми решениями, не срастаются.

7. Пусть $n > 2$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — корневое решение уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$, причем $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Докажите, что $x_1 \ldots x_{n-2} \leqslant \frac{2(n-1)}{k}$.

8. Докажите, что число корневых решений конечно.

9. Если $1 < x_n^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$, то $\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{x_1+\ldots+x_n} \leqslant \frac{n+3}{2}$.

10. Докажите, что если уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$ имеет решения и $n \neq k$, то $n \geqslant 2k - 3$ при $n \geqslant 5$ и $n > 4k - 6$ при $n = 3$ и $n = 4$.

11. Пусть $n > 2$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — корневое решение уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$ с минимальной суммой переменных, причем $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Докажите, что $x_1 \ldots x_{n-2} \leqslant \frac{n}{k}$.

Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **19.12.2019**

Серия 21. Уравнения Маркова

0. Пусть (a, b, c) — натуральное решение уравнения Маркова $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. С помощью теоремы Виета найдите еще одно решение с теми же b и c.

1. Докажите, что любое решение уравнения Маркова соединяется цепочкой соседних решений с решением $(1, 1, 1)$.

2. Докажите, что по каждому решению уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ при $k > 3$ можно построить решение с меньшей максимальной координатой. Выведите отсюда, что это уравнение не имеет решений.

3. Докажите, что координаты любого решения уравнения Маркова попарно взаимно просты.

4. Решение обобщенного уравнения Маркова $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$ называется корневым, если $2x_n > kx_1 \ldots x_{n-1}$. Докажите, что если у уравнения есть решение, то есть и корневое решение.

5. Приведите пример обобщенного уравнения Маркова степени выше 2 с несколькими (хотя бы двумя) корневыми решениями.

6. Докажите, что деревья, образованные корневыми решениями, не срастаются.

7. Пусть $n > 2$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — корневое решение уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$, причем $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Докажите, что $x_1 \ldots x_{n-2} \leqslant \frac{2(n-1)}{k}$.

8. Докажите, что число корневых решений конечно.

9. Если $1 < x_n^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$, то $\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{x_1+\ldots+x_n} \leqslant \frac{n+3}{2}$.

10. Докажите, что если уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$ имеет решения и $n \neq k$, то $n \geqslant 2k - 3$ при $n \geqslant 5$ и $n > 4k - 6$ при $n = 3$ и $n = 4$.

11. Пусть $n > 2$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — корневое решение уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$ с минимальной суммой переменных, причем $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Докажите, что $x_1 \ldots x_{n-2} \leqslant \frac{n}{k}$.