

Прямая Симсона

Multi multa; nemo omnia novit

Латинский афоризм

0. а) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

б) Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности треугольника.

1. а) Из точки P описанной окружности треугольника ABC проведены прямые PA_1 , PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным) углом к прямым BC , CA и AB соответственно. Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

б) Докажите, что при замене в определении прямой Симсона угла 90° на угол α она повернется на угол $90^\circ - \alpha$.

2. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P .

3. Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника.

а) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (эта точка называется точкой Микеля).

б) Используя точку Микеля, докажите утверждение 0б).

4. а) Точки A , B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP , BSP , ACP и точка P лежат на одной окружности.

б) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

5. Пусть K — произвольная точка, лежащая на описанной окружности вокруг равносностороннего треугольника ABC . Докажите, что прямая Симсона точки K делит пополам отрезок OK , где O — центр описанной окружности.

6. Докажите, что прямая Симсона точки K и отрезок KH лежит на окружности девяти точек треугольника ABC (H — ортоцентр $\triangle ABC$).

7. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек перпендикулярны и пересекаются на окружности девяти точек треугольника ABC .

8. С помощью прямой Симсона докажите теорему Птолемея.