**Кружок в Хамовниках. Группа 11-2** **13.02.2020**

## Серия 27. Геометрия

**1.** На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

**2.** На основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ взяли произвольную точку $X$, а на боковых сторонах — точки $P$ и $Q$ так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка $Y$, симметричная точке $X$ относительно $PQ$, лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.

**3.** На сторонах $AD$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ с центром $O$ отмечены такие точки $P$ и $Q$ соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

**(a)** Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

**(b)** Докажите, что прямые $AQ$ и $CP$ пересекаются на описанной окружности треугольника $ABC$.

**4.** Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ отмечены точки $M$ и $N$ так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные. Докажите, что прямая $MN$ параллельна основаниям трапеции.

**5.** В треугольнике $ABC$ точка $I$ — центр вписанной окружности, $I'$ — центр окружности, касающейся стороны $AB$ и продолжений сторон $CB$ и $CA$; $L$ и $L'$ — точки, в которых сторона $AB$ касается этих окружностей. Докажите, что прямые $IL'$, $I'L$ и высота $CH$ треугольника $ABC$ пересекаются в одной точке.

**6.** В треугольнике $ABC$ $AA_1$ — медиана, $AA_2$ — биссектриса, $K$ — такая точка на $AA_1$, что $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

**7.** Внутри треугольника $ABC$ взята такая точка $D$, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120°$. Вне треугольника $ABC$ взята такая точка $E$, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60°$ и точки $B$ и $E$ находятся в разных полуплоскостях относительно $AC$. Докажите, что $\angle AFD = 90°$, где $F$ — середина отрезка $BE$.

**Кружок в Хамовниках. Группа 11-2** **13.02.2020**

## Серия 27. Геометрия

**1.** На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

**2.** На основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ взяли произвольную точку $X$, а на боковых сторонах — точки $P$ и $Q$ так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка $Y$, симметричная точке $X$ относительно $PQ$, лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.

**3.** На сторонах $AD$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ с центром $O$ отмечены такие точки $P$ и $Q$ соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

**(a)** Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

**(b)** Докажите, что прямые $AQ$ и $CP$ пересекаются на описанной окружности треугольника $ABC$.

**4.** Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ отмечены точки $M$ и $N$ так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные. Докажите, что прямая $MN$ параллельна основаниям трапеции.

**5.** В треугольнике $ABC$ точка $I$ — центр вписанной окружности, $I'$ — центр окружности, касающейся стороны $AB$ и продолжений сторон $CB$ и $CA$; $L$ и $L'$ — точки, в которых сторона $AB$ касается этих окружностей. Докажите, что прямые $IL'$, $I'L$ и высота $CH$ треугольника $ABC$ пересекаются в одной точке.

**6.** В треугольнике $ABC$ $AA_1$ — медиана, $AA_2$ — биссектриса, $K$ — такая точка на $AA_1$, что $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

**7.** Внутри треугольника $ABC$ взята такая точка $D$, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120°$. Вне треугольника $ABC$ взята такая точка $E$, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60°$ и точки $B$ и $E$ находятся в разных полуплоскостях относительно $AC$. Докажите, что $\angle AFD = 90°$, где $F$ — середина отрезка $BE$.