Серия 35. Информация и взвешивания.

1. Есть 20 камней неизвестного веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что сделав не более 19 взвешиваний, можно все камни можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на вес самого тяжелого камня.

2. Есть 2020 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 2 камня на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Можно ли с помощью этих весой найти самый легкий камень?

3. В чемпионате по футболу участвуют 2020 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k, для которого с помощью нескольких операций можно гарантированно найти такую последовательность команд $T_1, T_2, \ldots, T_k$, что для всех $1 \leqslant i < j \leqslant k$ команда T_i слабее команды T_j.

4. Есть 6 совершенно одинаковых внешне монет, но 2 из них фальшивые. У всех настоящих монет одинаковый вес. Фальшивые монеты легче настоящих и весят поровну. Также есть чашечные весы, но, чтобы совершить на них взвешивание, надо предварительно заплатить одну монету. Если уплаченная монета настоящая, весы покажут правильный результат, а если фальшивая — могут показать что угодно. Можно ли с помощью таких весов найти хотя бы одну настоящую монету (и не потратить её)?

5. Имеется коллекция из n грузов различной массы и чашечные весы без гирь.
   (a) За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти самый лёгкий груз?
   (b) За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти самый тяжёлый груз?

6. У нас есть k фальшивых монет и n настоящих. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые тоже одинаково и легче настоящих. Также у нас есть двухчашечные весы, которые всегда показывают неправильный результат (могут показать любой из двух).
   (a) Пусть $k = 1$. При каких n можно гарантированно найти фальшивую монету?
   (b) Пусть $k = 1$. Какое наибольшее количество настоящих монет можно гарантированно определить при остальных n?
   (c) Пусть k и n произвольные. Какое наибольшее количество монет каждого типа можно гарантированно определить?

7. У Димы есть 100 камней, никакие два из которых не равны по массе. Также у него есть странные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть ровно 10 камней. Назовем пару камней ясной, если Дима может выяснить, какой из камней в этой паре тяжелее. Каково наименьшее возможное количество ясных пар?