

Серия 7. Конструктивы в тч

1. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии натуральных чисел либо бесконечно много точных квадратов, либо ни одного.
2. Существуют ли попарно различные натуральные числа x, y, z удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2018}$?
3. Существует ли 1000000 таких различных натуральных чисел, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?
4. Существуют ли 2020 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?
5. Сколько чисел из отрезка $[150, 2020]$ представляются в виде $n = НОК(a, b) + НОК(b, c) + НОК(a, c)$, где a, b, c некоторые натуральные числа?
6. Существует ли такой набор из 1000 различных натуральных чисел, что для любых двух чисел из набора их сумма делится на их разность?
7. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k , что для всякого натурального n , взаимно простого с a , число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n .
8. Докажите, что найдутся 2020 таких целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$, по модулю больших 100000, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2020}} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{2020}}$$

9. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?