

Серия 9. Теорема Ван дер Вардена. Первая часть.

Теорема Ван-дер-Вардена: Для любых натуральных k и r существует такое натуральное $W(k, r)$, что при любой раскраске чисел $\{1, 2, \dots, W(k, r)\}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины k .

Задачи около того.

1. Докажите, что можно покрасить все натуральные числа в два цвета, так чтобы не нашлось бесконечной одноцветной арифметической прогрессии.

Упрощённая теорема. При любой раскраске натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k .

2. Докажите, что из упрощённой теоремы следует изначальная.

Применяем, не доказав

В задачах этого блока можно использовать теорему Ван дер Вардена.

3. Пусть $\{a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots\}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел, такая что $a_{i+1} - a_i < 2019$ для любого i . Из теоремы Ван дер Вардена выведите, что эта последовательность содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии.

4. Назовём множество арифметических прогрессий *последовательным*, если их длины равны, разности совпадают, а первые члены — последовательные натуральные числа. Докажите, что при любой раскраске натурального ряда в 10 цветов найдутся 100 последовательных одноцветных арифметических прогрессий длины 1000.

5. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрашены в n цветов.

а) Докажите, что найдутся 100 строк и 100 столбцов, на пересечении которых стоят клетки одного цвета.

б) Докажите, что можно дополнительно ещё потребовать, чтобы все строки отстояли друг от друга на одинаковом расстоянии k , а столбцы — на одинаковом расстоянии l .

6. Докажите, что для любого действительного θ существует такое натуральное n , что θn^2 отличается от целого менее чем на 10^{-100} .

7. Плоскость покрашена в 100 цветов. Докажите, что существует треугольник площади 1, все вершины которого покрашены в один цвет.

Доказываем одномерный случай.

Будем доказывать теорему индукцией по k . База не заслуживает быть вынесенной отдельным пунктом. Дальнейшие события будут разворачиваться внутри перехода $k - 1 \rightarrow k$.

Определение: Пучком прогрессий (ранга d , радиуса k , с корнем в a) назовем набор из d различных арифметических прогрессий длины k , все из которых начинаются с одного и того же числа a . Тогда каждую из этих прогрессий (без корня) будем называть веткой пучка. Будем говорить, что пучок является *полихроматическим*, если внутри каждой ветки все числа покрашены в один цвет, эти цвета различны для разных веток и отличны от цвета, в который покрашен корень. Нам понадобится

Лемма: Предположим, что теорема Ван-дер-Вардена верна для $k - 1$. Тогда для любых натуральных $d \leq r$ существует такое натуральное $M(k, d, r)$, что при любой раскраске чисел $\{1, 2, \dots, M(k, d, r)\}$ в r цветов найдется либо одноцветная арифметическая прогрессия длины k , либо полихроматический пучок радиуса k и ранга d .

8. а) Докажите, что из леммы следует переход.

б) Докажите лемму индукцией по d .