Серия 5. Вероятностный метод.

1. Докажите, что существует такой полный ориентированный граф с n вершинами, что в нём не менее $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

2. Докажите, что существует раскраска рёбер полного графа K_n в два цвета такая, что число одноцветных копий графа K_m не превосходит $C_n^m \cdot 2^{1-C_m^2}$

3. В классе n учеников. Каждую неделю ровно k из них дежурят. Докажите, что если прошло меньше t^{k-1} недель, то всех учеников можно разбить на t групп так, чтобы в каждом дежурстве принимали участие ученики хотя бы из двух групп.

4. Пусть v_1, v_2, $\ldots$, $v_n \in \mathbb{R}^d$ такие, что все $|v_i| = 1$.
Докажите, что тогда существует такой набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где все x_i равны либо 1, либо -1, что $|x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n| \leqslant \sqrt{n}$.
И кроме того существует такой набор $y_1, y_2, \ldots, y_n$, где все y_i равны либо 1, либо -1, что $|y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n| \geqslant \sqrt{n}$.

5. В классе учатся несколько мальчиков и девочек, причём каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. Докажите, что можно выбрать не менее половины школьников так, чтобы каждый выбранный мальчик дружил с нечётным количеством выбранных девочек.

6. Зафиксированно натуральное число k. В волейбольном однокруговом турнире играют n команд. Докажите, что для некоторого n команды могут так сыграть, что для любого множества из k команд найдётся какая-то, выигравшая у них всех.

7. В графе n вершин и $\frac{nd}{2}$ рёбер ($d \geqslant 1$). Докажите, что в нём можно выбрать множество из не менее чем $\frac{n}{2d}$ вершин так, чтобы никакие две из них не были соединены ребром.

8. В графе n вершин и m рёбер, причём степень каждой вершины не меньше 1. Докажите, что его можно разделить на 2 множества V_1 и V_2 так, чтобы между V_1 и V_2 было проведено хотя бы $\frac{m}{2} + \frac{n}{6}$ рёбер.

9. Докажите, что в любом конечном множестве A, состоящем из натуральных чисел, можно выделить подмножество S, размер которого больше трети от размера множества A, чтобы в множестве S не нашлось таких a, b, c, что $a + b = c$.