Серия 4. Поляры.

1. Полярой точки A относительно ω назовём прямую a такую, что $A' \in a$ и $a \perp OA$. Соответственно, A будет называться **полюсом** прямой a.

а) Докажите, что если a и b – поляры точек A и B, соответственно, то $B \in a$ тогда и только тогда, когда $A \in b$.
б) Пусть a, b и c – поляры точек A, B и C, соответственно. Докажите, что A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда a, b и c пересекаются в одной точке.
в) Из точки A к ω проведены секущие l и k, пересекающия ω в точках B, C и D, E соответственно. $M = BD \cap CE$, $K = BE \cap CD$. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке L, а касательные к ω в точках D и E – в точке K. Докажите, что точки M, N, L и K пересекаются в одной точке. *Указание: воспользуйтесь теоремой Паскаля.*
Следствие: MK – поляра A.

2. Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается его сторон AB, BC, CD и DA в точках A_1, B_1, C_1 и D_1, соответственно. $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $M = A_1B_1 \cap C_1D_1$, $K = B_1C_1 \cap A_1D_1$.
а) Докажите, что AC, BD, A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в одной точке.
б) Докажите, что P, Q, M и K лежат на одной прямой.

3. Прямая l касается вписанной окружности (I – инцентр) треугольника ABC. A_0 лежит на прямой l, так что $\angle AIA_0 = 90°$. Аналогично, определим точки B_0, C_0. Докажите, что прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.

4. Окружность ω с центром I касается внутренним образом окружности Ω и её хорды AB. Точка M – середина дуги AB (I и M лежат по одну сторону от AB), а точка N – середина противоположной дуги. Касательные из точки N касаются ω в точках C и D. Стороны AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, а диагонали $ABCD$ пересекаются в Y . Докажите, что точки X, Y , I и M лежат на одной прямой.

5. Окружность α и β с центрами A и B соответственно касаются друг друга внешним образом в точке L, в которой восстановлена их общая касательная. Окружность θ касается окружностей α и β внутренним образом в точках M и N соответственно. На окружности θ отмечены точки P и Q так, что PQ — диаметр θ, перпендикулярный прямой, причем P, A и M лежат в одной полуплоскости относительно. Докажите, что прямые PA, QB, MN и пересекаются в одной точке.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. На отрезк BC выбраны точки X и Y так, что $\angle CAX = \angle YAB$. Точки K и S – основания перпендикуляров из B на прямые AX и AY, соответственно. Точки T и L – основания перпендикуляров из C на прямые AX и AY, соответственно. Докажите, что KL и ST пересекаются на прямой BC.

7. Дана описанная четырехугольная пирамида $ABCDS$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q, причем точки A и B лежат на отрезках PD и PC. Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L. Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на BD.