Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-1.

Серия 3. Такая непростая теория чисел.

1. Обозначим A множество всех простых чисел, делящих $2^n - 3$. Докажите, что A и $\mathbb{P} \setminus A$ — бесконечные.

2. Натуральные числа m и n таковы, что $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$. Докажите, что m и n не взаимно простые.

3. Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей.

а) Сколько существует попарно несравнимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - 1$ делится на n?

б) Докажите, что существует такое натуральное число a, что $1 < a < \frac{n}{k} + 10$ и $a^2 - a$ делится на n.

4(повторяем всё, что знаем из алгебры и ТЧ). Число 3^{2019} начинается с двойки и содержит ещё 963 цифры. А какое наибольшее количество единиц подряд содержится в десятичной записи числа $\frac{1}{3^{2019}}$?

5. Рассмотрим последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, заданную рекуррентно $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$.

а) Докажите, что в десятичной записи числа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_{2k}}$ содержится любая конечная последовательность цифр.

б) Докажите, что в десятичной записи числа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_k}$ содержится любая конечная последовательность цифр.

Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-1.

Серия 3. Такая непростая теория чисел.

1. Обозначим A множество всех простых чисел, делящих $2^n - 3$. Докажите, что A и $\mathbb{P} \setminus A$ — бесконечные.

2. Натуральные числа m и n таковы, что $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$. Докажите, что m и n не взаимно простые.

3. Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей.

а) Сколько существует попарно несравнимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - 1$ делится на n?

б) Докажите, что существует такое натуральное число a, что $1 < a < \frac{n}{k} + 10$ и $a^2 - a$ делится на n.

4(повторяем всё, что знаем из алгебры и ТЧ). Число 3^{2019} начинается с двойки и содержит ещё 963 цифры. А какое наибольшее количество единиц подряд содержится в десятичной записи числа $\frac{1}{3^{2019}}$?

5. Рассмотрим последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, заданную рекуррентно $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$.

а) Докажите, что в десятичной записи числа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_{2k}}$ содержится любая конечная последовательность цифр.

б) Докажите, что в десятичной записи числа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_k}$ содержится любая конечная последовательность цифр.