Серия 38. Разнобой.

1. Докажите, что существует бесконечно много непостоянных целочисленных арифметических прогрессий, состоящих из 2016 членов, таких, что в каждой из них произведение всех членов является точной 2017-й степенью натурального числа.

2. Назовем натуральное число маленьким, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, составленному из 49 маленьких чисел, поставлено в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что можно так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, не сопоставлено оставшееся число.

3. Совершенное число, большее 28, делится на 7. Докажите, что оно делится на 49. (Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.)

4. Пусть P является внутренней точкой треугольника ABC, а D, E и F — точки пересечения прямой AP и стороны BC треугольника, прямой BP и стороны CA, прямой CP и стороны AB соответственно. Докажите, что площадь треугольника ABC равна 6, если площадь каждого из треугольников PFA, PDB и PEC равна 1

5. На доске написаны в ряд числа от 1 до 100 (ровно в таком порядке). Хан и Банах играют в игру. В каждый ход Хан выбирает несколько подряд идущих чисел (может быть, одно, может быть, все), после чего Банах прибавляет ко всем выбранным числам единицу, либо вычитает из всех выбранных чисел единицу. Цель Хана сделать так, чтобы как минимум 98 из написанных на доске чисел делилось на 4. Сможет ли Банах ему помешать?

6. Назовём натуральное число удачным, если существует точный квадрат, который начинается и заканчивается этим числом. Например, число 1 удачное, потому что 121 начинается и заканчивается единицей. Докажите, что существует стозначное удачное число, состоящее из единиц и двоек.

7. Четыре натуральных числа x, y, z и t удовлетворяют равенствам
$$xy - zt = x + y = z + t$$
Могут ли оба оба xy и zt быть точными квадратами?