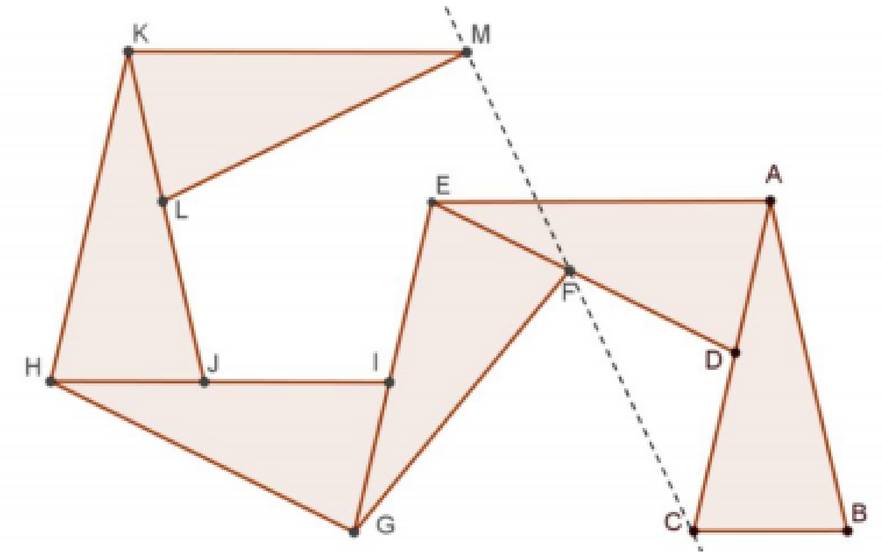
Серия 36. Последняя планиметрия на кружке в Хамовниках*

1. Шесть равных равнобедренных треугольников расположены как показано на картинке. Докажите, что точки M, F и C лежат на одной прямой.



2. На плоскости отмечены точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 так, что

$$AB = BC = CD = DA = A_1B_1 = B_1C_1 == C_1D_1 = D_1A_1 = AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$$

Точка T — отражение точки C_1 относительно точки D_1. Докажите, что окружности (AA_1B_1), (ADC) и (AD_1T) имеют общую точку, отличную от точки A.

3. Точки A, B, C, X, D, Y расположены на окружности ω именно в таком порядке. BD — диаметр, кроме того $DX = DY = DP$, где P — точка пересенчния AC и BD. Обозначим E, F точки пересечения XP с прямыми AB, BC соответственно. Докажите, что точки B, E, F, Y лежат на одной окружности.

4. На сторонах AP и PD остроугольного треугольника APD отмечены точки B и C. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q. Точки H_1 и H_2 — ортоцентры треугольников APD и BPC соответственно. Описанные окружности треугольников ABQ и CDQ вторично пересекаются в точке X, а описанные окружности труегольников ADQ и BCQ — в точке $Y \neq Q$. Докажите, что если прямая H_1H_2 проходит через X, то она же проходит и через Y.

5. Точка O центр окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. Точка P — произвольная точка на Ω, отличная от A, B, C и диаметрально противоположных к ним. Обозначим O_A, O_B, and O_C центры описанных окружностей треугольников AOP, BOP, и COP. Прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, перпендикулярные BC, CA, AB и проходящие через O_A, O_B, O_C, соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C, касается прямой OP.

6. Дан вписанный 100-угольник $P_1P_2 \cdots P_{100}$. Будем считать, что $P_i = P_{i+100}$ для всех i. Диагонали $\overline{P_{i-2}P_{i+1}}$ и $\overline{P_{i-1}P_{i+2}}$ пересекаются в точке Q_i. Предположим, для некоторой точки P для всех i выполнено $\overline{PP_i} \perp \overline{P_{i-1}P_{i+1}}$. Докажите, что точки $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{100}$ лежат на одной окружности.

---

*— если карантин не продлится неимоверно долго.