Серия 32. Странная.

1. Рая и Мая играют в игру на доске $n \times n$, начинет Рая. Рая каждым ходом красит квадрат 2×2 в красный цвет, а Мая каждым ходом красит квадрат 1×1 в синий цвет. Они играют до тех пор, пока у Раи не кончатся ходы. После этого все оставшиеся клетки закрашиваются в синий цвет и побеждает та, клеток чьего цвета закрашено больше. Кто побеждает при правильной игре?

2. Человек рассеянный начинает свой путь в одной из точек координатной плоскости. За каждый шаг он проходит расстояние 1 в одном из направлений. При этом при выборе направления следующего шага он помнит только направление своего предыдущего шага (то есть руководствуется функцией из $(-\pi, \pi]$ в $(-\pi, \pi]$). Верно ли, что существует такое d и схема выбора для человека рассеянного, что для любой точки на плоскости он сможет посетить точку на расстоянии не больше d от неё?

3. В некоторых точках натурального ряда расставлены машины, в каждой точке — не более одной. Известно, что изначально для каждого натурального n в точках $1, 2, 3, \ldots, n$ находится не более чем $[n/2]$ машин. Каждую секунду машины одновременно пытаются проехать на 1 вперёд: если точка, куда хочет проехать машина, свободна, то она проезжает; если занята, то остаётся на месте и сигналит. Докажите, что для каждой машины существует момент времени, начиная с которого она будет ехать без остановки.

4. В составлении Межгалактической Математической Олимпиады участвуют 10^{10} членов жюри. Вариант Олимпиады должен состоять из трёх задач: по одной каждой из трёх тем (алгебра, геометрия, комбинаторика). На выбор есть по 10 задач каждой из трёх тем. Известно, что каждый член жюри не любит по одной задаче каждой из тем, и каждую задачу не любят ровно 10^9 членов жюри. Председатель жюри знает предпочтения членов жюри и хочет сделать так, чтобы в итоговый вариант олимпиады попала очень нравящаяся ему задача A. Процесс голосования за вариант устроен следующим образом: в очередном раунде голосования, когда осталось по n задач каждой из тем, председатель жюри разбивает их на n непересекающихся троек (в каждой тройке по задаче каждой темы). После этого каждый член жюри голосует против всех тех троек, в которых есть хотя бы одна задача, которую он не любит. После этого, все три задачи из тройки, против которой проголосовало наибольшее количество человек, выкидываются. Если таких троек несколько, председатель сам выбирает одну из них. Так продолжается, пока не останется одна тройка задач, которая и формирует окончательный вариант. Всегда ли председатель жюри сможет добиться, чтобы задача A вошла в вариант?

5. В трёх кучках камней 2017, 2018 и 2019 камней соответственно. За одну операцию можно из кучки с чётным количеством камней переложить половину камней в какую-то другую кучку (из оставшихся двух), либо, если в кучке ровно 1 камень, можно его выкинуть (и получится кучка из 0 камней). Докажите, что можно выкинуть все камни.

6. Король поймал двух мудрецов и посадил их в разные тюремные камеры. Затем король подбросил симметричную монетку бесконечное количество раз. Все результаты чётных бросков он сообщил одному из мудрецов, а все результаты нечётных бросков — второму.
Далее король предлагает каждому мудрецу назвать номер любого подбрасывания, результат которого ему не известен. Если результаты бросков, названные мудрецами, одинаковые, то король дарит им свободу, иначе казнит.
Мудрецы знали, что их поймают, и могли заранее договориться.
(a) Как им нужно действовать, чтобы вероятность победы была более 60%?
(b) Придумайте стратегию, чтобы вероятность победы была более 65%.