

Серия 30 геометрия.

1. На плоскости расположены две окружности. Найти геометрическое место центров окружностей, перпендикулярных обеим.
2. На плоскости зафиксированы луч с вершиной A и точка P вне прямой, содержащей этот луч. На луче выбирают переменную точку K , затем на продолжении AK за точку K отмечают точку N так, что $NK = 1$, а на прямой PK отмечают точку M (отличную от K) так, что $NM = 1$. Докажите, что все прямые NM , полученные таким образом, касаются одной окружности.
3. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$.
4. Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии по поверхности не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более 600 км?
5. Дан треугольник XBC . Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC , центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC . Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M .
6. В выпуклой шестиугольной пирамиде длины одиннадцати ребер равны 1. Чему может быть равна длина двенадцатого ребра?
7. Let ABC be an acute triangle with incenter I , circumcenter O , and circumcircle Γ . Let M be the midpoint of \overline{AB} . Ray AI meets \overline{BC} at D . Denote by ω and γ the circumcircles of $\triangle BIC$ and $\triangle BAD$, respectively. Line MO meets ω at X and Y , while line CO meets ω at C and Q . Assume that Q lies inside $\triangle ABC$ and $\angle AQM = \angle ACB$.
Consider the tangents to ω at X and Y and the tangents to γ at A and D . Given that $\angle BAC \neq 60^\circ$, prove that these four lines are concurrent on Γ .

Серия 30 геометрия.

1. На плоскости расположены две окружности. Найти геометрическое место центров окружностей, перпендикулярных обеим.
2. На плоскости зафиксированы луч с вершиной A и точка P вне прямой, содержащей этот луч. На луче выбирают переменную точку K , затем на продолжении AK за точку K отмечают точку N так, что $NK = 1$, а на прямой PK отмечают точку M (отличную от K) так, что $NM = 1$. Докажите, что все прямые NM , полученные таким образом, касаются одной окружности.
3. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$.
4. Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии по поверхности не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более 600 км?
5. Дан треугольник XBC . Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC , центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC . Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M .
6. В выпуклой шестиугольной пирамиде длины одиннадцати ребер равны 1. Чему может быть равна длина двенадцатого ребра?
7. Let ABC be an acute triangle with incenter I , circumcenter O , and circumcircle Γ . Let M be the midpoint of \overline{AB} . Ray AI meets \overline{BC} at D . Denote by ω and γ the circumcircles of $\triangle BIC$ and $\triangle BAD$, respectively. Line MO meets ω at X and Y , while line CO meets ω at C and Q . Assume that Q lies inside $\triangle ABC$ and $\angle AQM = \angle ACB$.
Consider the tangents to ω at X and Y and the tangents to γ at A and D . Given that $\angle BAC \neq 60^\circ$, prove that these four lines are concurrent on Γ .