Серия 29. Локальная лемма Ловаса.

Определение. Событие A называется *независимым* от событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, если для любых непересекающихся $S_1, S_2 \subset \{1, 2, \dots, n\}$

$$P\left(A|\bigcap_{j_1\in S_1} B_{j_1} \cap \bigcap_{j_2\in S_2} \overline{B_{j_2}}\right) = P(A).$$

Локальная лемма Ловаса: $A_1, \dots, A_n$ — события, D — ориентированный граф на вершинах $1, \dots, n$, так что любое A_i независимо от событий A_j при $\{j \mid j \neq i$ и в j не ведет ребро из $i\}$. Пусть $x_1, \dots, x_n \in [0, 1)$, так что для любого i

$$P(A_i) \leqslant x_i \prod_{\overrightarrow{ij}\in D} (1 - x_j).$$

Тогда

$$P(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \overline{A_i}) \geqslant \prod_{1\leqslant i\leqslant n} (1 - x_i) > 0.$$

1. Рассмотрим какое-то событие A_i и соответствующую ему вершину, а также произвольное подмножество S множества чисел от 1 до n (не включая i). Давайте индукцией по мощности S доказывать, что $P(A_i|\bigcap_{j\in S}\overline{A_j}) \leqslant x_i$

a) Пусть S_1 — множество вершин из S, в которые входит стрелка из A_i, а S_2 — множество остальных вершин из S. Докажите, что

$$P(A_i|\bigcap_{j\in S}\overline{A_j}) = \frac{P(A_i \cap (\bigcap_{j\in S_1}\overline{A_j})|\bigcap_{l\in S_2}\overline{A_l})}{P(\bigcap_{j\in S_1}\overline{A_j}|\bigcap_{l\in S_2}\overline{A_l})}$$

b) Докажите, что числитель дроби не превосходит

$$x_i \prod_{\overrightarrow{ij}\in D} (1 - x_j)$$

c) Докажите, используя предположение индукции, что знаменатель не меньше

$$\prod_{\overrightarrow{ij}\in D} (1 - x_j)$$

d) Выведите из предположения индукции утверждение локальной леммы.

2. Пусть $A_1, \dots, A_n$ - события, каждое из которых независимо от всех остальных кроме не больше чем d событий, и $P(A_i) \leqslant \frac{1}{e(d+1)}$. Докажите, что $P(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{A_i}) > 0$.

3. В конечном множестве S выбрано несколько k-элементных подмножеств, так что любой элемент из S принадлежит ровно k выбранным подмножествам, $k \geqslant 9$. Докажите, что можно покрасить элементы S в два цвета, так чтобы каждое из выделенных подмножеств содержало элементы обоих цветов.

4. По окружности расставлены $11n$ разноцветных бусин — по 11 бусин каждого из n цветов. Докажите, что можно выбрать n бусин разных цветов, никакие две из которых не находятся рядом друг с другом на окружности.

5. В графе степень каждой вершины не превосходит Δ. Все вершины раскрасили в r цветов, так что вершин каждого цвета оказалось не меньше чем $2e\Delta + 1$. Докажите, что можно выбрать r вершин разных цветов, попарно не соединенных ребрами.

6. В лагерь приехало несколько пионеров, каждый из них имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что пионерам можно выдать пилотки, покрашенные в 1331 цвет так, чтобы у знакомых каждого пионера были пилотки хотя бы 20 различных цветов (*Всероссийская олимпиада, 2006 год*). А каким количеством цветов можно обойтись, если применить локальную лемму?

7. В ориентированном графе в каждую вершину входит не больше Δ ребер и из каждой вершины выходит не меньше δ ребер. Докажите, что для любого натурального $k \leqslant \frac{1}{1-(e(\delta\Delta+1))^{-1/\delta}}$ в графе найдется ориентированный цикл длины кратной k.

Домашнее задание

8. Глеб задумал натуральные числа N и a, $a < N$. Число a он написал на доске. Затем он начал выполнять следующую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число, а полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных чисел была больше $100N$?

9. К Ивану на день рождения пришли $3n$ гостей. У Ивана есть $3n$ цилиндров с написанными сверху буквами А, Б и В, по n штук каждого типа. Иван хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или больше) так, чтобы длина каждого хоровода делилась на 3, и при взгляде на любой хоровод сверху читалось бы по часовой стрелке АБВАБВ...АБВ. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(3n)!$ различными способами. (Цилиндры с одинаковыми буквами неразличимы; все гости различны.)

10. Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в черный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k черных клеток, либо вовсе не было черных клеток?