Серия 27. Трёхмерная.

1. Куб со стороной 3 разбит на 27 единичных кубиков. Эти кубики пронумерованы числами от 1 до 27. За одну операцию разрешается поменять местами куб с номером 27 с одним из его соседей по стороне. Всегда ли можно за некоторое количество операций добиться того, чтобы куб 27 оказался на своём изначальном месте, а для любой другой кубик с номером n поменялся местами с кубиком $27 - n$?

2. Муравей может ползать от одной вершины куба до другой по ребру, либо по диагонали грани. Известно, что муравей прополз из некоторой вершины в противоположную вершину куба так, что он не проползал через одну точку дважды. Каков его максимальный путь?

3. Найдите наибольшее натуральное n такое, что на поверхности куба можно отметить n точек, не все из которых лежат в одной грани так, чтобы они являлись вершинами правильного n-угольника (плоского).

4. Червяк прогрыз путь длиной 10 от одной точки на поверхности яблока радиуса 6 до другой. Докажите, что яблоко можно разрезать на две равные половины так, чтобы только одна из них была червивой. Яблоко считаем сферой.

5. В одной далёкой галактике более миллиона звёзд. Пусть M — множество различных попарных расстояний между ними. Докажите, что в любой момент времени в M хотя бы 79 элементов.

6. В куб помещён выпуклый многогранник так, что его проекции на любую грань целиком покрывают её. Докажите, что объём многогранника не меньше $1/3$ объёма куба.

7. Куб $10 \times 10 \times 10$ состоит из 1000 единичных кубиков. Из них 500 покрашены в чёрный цвет и ещё 500 — в белый цвет. Докажите, что найдутся хотя бы 100 единичных квадратиков, являющихся общей гранью чёрного и белого кубика.

Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-1.

Серия 27. Трёхмерная.

1. Куб со стороной 3 разбит на 27 единичных кубиков. Эти кубики пронумерованы числами от 1 до 27. За одну операцию разрешается поменять местами куб с номером 27 с одним из его соседей по стороне. Всегда ли можно за некоторое количество операций добиться того, чтобы куб 27 оказался на своём изначальном месте, а для любой другой кубик с номером n поменялся местами с кубиком $27 - n$?

2. Муравей может ползать от одной вершины куба до другой по ребру, либо по диагонали грани. Известно, что муравей прополз из некоторой вершины в противоположную вершину куба так, что он не проползал через одну точку дважды. Каков его максимальный путь?

3. Найдите наибольшее натуральное n такое, что на поверхности куба можно отметить n точек, не все из которых лежат в одной грани так, чтобы они являлись вершинами правильного n-угольника (плоского).

4. Червяк прогрыз путь длиной 10 от одной точки на поверхности яблока радиуса 6 до другой. Докажите, что яблоко можно разрезать на две равные половины так, чтобы только одна из них была червивой. Яблоко считаем сферой.

5. В одной далёкой галактике более миллиона звёзд. Пусть M — множество различных попарных расстояний между ними. Докажите, что в любой момент времени в M хотя бы 79 элементов.

6. В куб помещён выпуклый многогранник так, что его проекции на любую грань целиком покрывают её. Докажите, что объём многогранника не меньше $1/3$ объёма куба.

7. Куб $10 \times 10 \times 10$ состоит из 1000 единичных кубиков. Из них 500 покрашены в чёрный цвет и ещё 500 — в белый цвет. Докажите, что найдутся хотя бы 100 единичных квадратиков, являющихся общей гранью чёрного и белого кубика.