Серия 24. Линейная алгебра.

1. (разберём сегодня)

а) В квадрате 8×8 некоторые клетки чёрные, а остальные белые. Ваня может перекрасить 4 клетки в любом квадратике 2×2 в противоположный цвет. Всегда ли он может добиться того, чтобы все клетки стали белыми?

б) В квадрате 8×8 в каждой клетке записано действительное число. Ваня может прибавить к любым 4-м клеткам в любом квадратике 2×2 произвольное действительное число. Всегда ли он может добиться того, чтобы все числа стали нулями?

2. По окружности расставлены p целых чисел (p — простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2013}.

3. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $(n + m - 1)$ чисел.

4. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

5. Имеется клетчатая таблица $(k+2) \times (l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

6. В полном графе некоторые рёбра покрашены в красный, остальные —– в чёрный. Назовём весом треугольника сумму чисел в его рёбрах Докажите, что можно написать на каждом ребре числа так, чтобы для каждого чёрного ребра сумма весов треугольников, содержащих его была равна нулю, а для каждого красного аналогичная сумма была равна 1.

7. На плоскости даны n точек, никакие 3 не лежат на одной прямой. Сколькими различными способами это множество можно разделить на два непустых подмножества так, чтобы их выпуклые оболочки не пересекались?

8. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.