

## Серия 23. Геометрия.

1. Докажите, что расстояние между серединой стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  и серединой дуги  $ABC$  его описанной окружности не меньше, чем  $AB/2$ .
2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели медиану  $AM$ , высоту  $AH$  и биссектрису  $AL$ . Оказалось, что точки  $B, H, L, M, C$  лежат на прямой  $BC$  именно в таком порядке, причем  $LH < LM$ . Докажите, что  $BC > 2AL$ .
3. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ , а медианы треугольника  $ACD$  — в точке  $N$ . Окружность, описанная около треугольника  $ACM$ , пересекает отрезок  $BD$  в точке  $K$ , лежащей внутри треугольника  $AMB$ . Известно, что  $\angle MAN = \angle ANC = 90^\circ$ . Докажите, что  $\angle AKD = \angle MKC$ .
4. Неравнобедренный треугольник  $ABC$  периметра 12 вписан в окружность  $\omega$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины дуг  $ABC$  и  $ACB$  соответственно. Касательная, проведенная к окружности  $\omega$  в точке  $A$ , пересекает луч  $PQ$  в точке  $R$ . Оказалось, что середина отрезка  $AR$  лежит на прямой  $BC$ . Найдите длину отрезка  $BC$ .
5. Биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . На продолжениях отрезков  $BB_1$  и  $CC_1$  отмечены точки  $B'$  и  $C'$  соответственно так, что четырехугольник  $AB'IC'$  — параллелограмм. Докажите, что если  $\angle BAC = 60^\circ$ , то прямая  $B'C'$  проходит через точку пересечения описанных окружностей треугольников  $BC_1B'$  и  $CB_1C'$ .
6. В тетраэдре середины всех ребер лежат на одной сфере. Докажите, что его высоты пересекаются в одной точке.
7. В тетраэдре  $PABC$  проведена высота  $PH$ . Из точки  $H$  на прямые  $PA, PB$  и  $PC$  опущены перпендикуляры  $HA', HB'$  и  $HC'$ . Плоскости  $ABC$  и  $A'B'C'$  пересекаются по прямой  $\ell$ . Точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямые  $OH$  и  $\ell$  перпендикулярны.
8. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырех апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)
9. Given is a tetrahedron  $ABCD$  in which  $AB = CD$  and the sum of measures of the angles  $BAD$  and  $BCD$  equals 180 degrees. Prove that the measure of the angle  $BAD$  is larger than the measure of the angle  $ADC$ .
10. In tetrahedron  $ABCD$  following equalities hold:  $\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD$   $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC$  Prove that center of sphere circumscribed about  $ABCD$  lies on a line through midpoints of  $AB$  and  $CD$ .