

Серия 22. Разнообразная.

1. Найдите количество перестановок (x_1, x_2, \dots, x_n) набора $(1, 2, \dots, n)$, удовлетворяющих условиям $x_i < x_{i+2}$ при $1 \leq i \leq n-2$, $x_i < x_{i+3}$ при $1 \leq i \leq n-3$. Здесь $n \geq 4$.
2. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а CN — биссектриса. Прямая CN вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M . Прямая ℓ параллельна прямой AB и касается вписанной окружности треугольника ABC . Точка R на прямой ℓ такова, что $CI \perp IR$. Описанная окружность треугольника MNR вторично пересекает прямую IR в точке S . Докажите, что $AS = BS$.
3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, среднее арифметическое и среднее геометрическое делителей которых одновременно являются целыми числами.
4. В колледже учатся 300 студентов. Любые два студента либо знают друг друга, либо не знают друг друга, и нет трёх студентов, знающих друг друга. Известно, что каждый студент знает не более n других студентов и для каждого m ($1 \leq m \leq n$) существует студент, знающий ровно m других студентов. Найдите наибольшее возможное значение n .
5. Чему равно наименьшее возможное значение выражения $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{2019} - x_{2020})^2 + (x_{2020} - x_1)^2$, где $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ — различные целые числа?
6. Let ABC be a triangle with $\angle C = 90^\circ$, and let H be the foot of the altitude from C . A point D is chosen inside the triangle CBH so that CH bisects AD . Let P be the intersection point of the lines BD and CH . Let ω be the semicircle with diameter BD that meets the segment CB at an interior point. A line through P is tangent to ω at Q . Prove that the lines CQ and AD meet on ω .
7. Suppose that a sequence a_1, a_2, \dots of positive real numbers satisfies

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

for every positive integer k . Prove that $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ for every $n \geq 2$.

8. В каждую клетку таблицы 2019×2019 вписано одно число из множества $\{-1, 0, 1\}$ так, что сумма всех вписанных чисел равна 0. Докажите, что найдутся две строки и два столбца этой таблицы такие, что сумма четырёх чисел, написанных на пересечении этих строк и столбцов, равна 0.