

Серия 21. Тригонометрия. Это как планиметрия, только рисунков нет.

1. а) Пусть α, β, γ — углы треугольника, докажите, что если ни один из них не прямой, то

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

б) С помощью теоремы синусов и тригонометрических формул докажите теорему Птолемея.

2. Докажите, что всякий угол $\alpha \in (0; \pi)$ можно единственным образом разделить в фиксированном отношении синусов.

3. Существует ли выпуклый 2019-угольник, у которого длины всех сторон, диагоналей, а также площадь являются целыми числами?

4. Вычислите следующие произведения:

а) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$;

б) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$;

в) $\cos \frac{\pi}{19} \cos \frac{2\pi}{19} \cos \frac{3\pi}{19} \dots \cos \frac{18\pi}{19}$.

5. Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

6. Существует ли такое действительное x , что числа $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 2004x$ оба целые?

7. Докажите, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{k}$ сходится.

8. Дано натуральное число n . Для какого наименьшего c существует приведённый многочлен $P(x)$ степени n с действительными коэффициентами, для которого выполнено $|P(x)| \leq c$ при всех $x \in [-1; 1]$?