Серия 16. Конфиугурация прямых.

1. На плоскости проведены n прямых общего положения.
а) На сколько частей они разбивают плоскость?
б) Сколько в среднем у этих частей звеньев в границе?
в) Сколько из этих частей бесконечны?

2. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны каждой из проведённых прямых были равны.

3. В городе М расположены 7 высоток, никаакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Может ли так быть, что гуляя по городу, можно видеть высотки в любом циклическом порядке?

4. На плоскости проведены n прямых общего положения (то есть никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке). Рассмотрим части, на которые эти прямые разбивают плоскость. Через K обозначим число частей, являющихся треугольниками.
а) Докажите, что $K \geqslant (2n-3)/3$ при $n \geqslant 3$.
b) Для всех n приведите пример, в котором $K = n-2$.

5. Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны, разрезают плоскость на части. Внутри одной из этих частей отметили точку A. Докажите, что точка, лежащая с A по разные стороны от всех данных прямых, существует тогда и только тогда, когда часть, содержащая A, неограничена.

6. На плоскости проведены $n > 2$ прямых общего положения. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое
а) наименьшее;
b) наибольшее
количество внутренностей углов может быть среди этих частей?

7. Consider $n \geqslant 3$ lines in the plane such that no two lines are parallel and no three have a common point. These lines divide the plane into polygonal regions; let F be the set of regions having finite area. Prove that it is possible to colour
a) $\lceil \sqrt{n/2} \rceil$
b)$\lceil \sqrt{2n/3} \rceil$
c) $\lceil \sqrt{n} \rceil$
of the lines blue in such a way that no region in F has a completely blue boundary. (For a real number x, $\lceil x \rceil$ denotes the least integer which is not smaller than x.)

Серия 17. Про интерполяцию. Избранное.

4. Для произвольных различных a, b, c, d докажите, что

$$\frac{a(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b(c+d+a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c(d+a+b)}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0.$$

6. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами степени n, значения которого в точках $0, 1, \ldots n$ являются различными степенями двойки?

7. Многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами при всех натуральных аргументах принимает значения, дающие остаки 57 или 179 при делении на 2017, причём оба остатка присутствуют. Докажите, что его степень хотя бы 2016.

8. Дано натуральное число $n > 3$. Назовём набор из n точек на координатной плоскости допустимым, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ разделяет допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже —- нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из n точек можно разделить многочленом степени не более k?

10. Найдите в замкнутом виде значение выражения

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{(2^k-3^1)(2^k-3^2)\ldots(2^k-3^{1000})}{(2^k-2^1)(2^k-2^2)\ldots(2^k-2^{k-2})(2^k-2^{k+1})\ldots(2^k-2^{1000})}.$$

Серия 18. Интересные задачи неизвестно откуда.

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число $5^n - 1$ не делится на $2^n + 1$.

2. Даны два набора из 8 точек: $A_1, B_1, C_1, D_1, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, A'_2, B'_2, C'_2, D'_2$. Назовём два четырёхугольника *похожими*, если они вписаны в концентрические (возможно. совпадающие) окружности. Известно, что каждый из пяти четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_1A'_1B_1B'_1$, $B_1B'_1C_1C'_1$, $C_1C'_1D_1D'_1$, $D_1D'_1A_1A'_1$ похож на многоугольник, полученный из него заменой всех индексов 1 на 2. Докажите, что четырёхугольники $A'_1B'_1C'_1D'_1$ и $A'_2B'_2C'_2D'_2$ также похожи.

3. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек *образует инверсию*, если карточка с бóльшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, …, n. Докажите, что того, как Карл совершит все n действий, количество инверсий окажется таким же, как было вначале.

4. В городе счётное количество жителей, занумерованных всеми натуральными числами. Также в городе есть тайные общества, каждое состоит их 7 человек (любые два общества отличаются составом). При любом натуральном n житель с номером n участвует не менее, чем в n обществах (возможно, в бесконечном количестве обществ). Докажите, что можно прикрыть некоторые общества (возможно, ни одного не прикрыть) так, чтобы это условие по-прежнему выполнялось, но при прикрытии любого ещё одного общества уже не выполнялось бы.