Про интерполяцию.

Пусть даны два набора чисел: $x_0, x_1, \dots x_n$ и $y_0, y_1, \dots y_n$, причём в первом наборе все числа различны. Задача интерполяции —- найти многочлен F степени не выше n такой, что $F(x_i) = y_i$ при $i = 0, 1, \dots n$.

Определим последовательность многочленов f_i следующим образом:
$f_0(x) = y_0$ (константа)
$f_k(x) = f_{k-1}(x) + (y_k - f_{k-1}(x_k)) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}$ Построение многочлена $F(x) = f_n(x)$ называется *интерполяционным методом Ньютона.*

1. Докажите, что метод Ньютона корректно восстанавливает многочлен.

2. а) Докажите, что любой многочлен целозначный многочлен можно представить в виде линейной комбинации многочленов C_x^k с целыми коэффициентами.

3. Сумасшедший профессор внёс в базу компьютера n многочленов, степень каждого не превосходит 2019. Известно, что каждый многочлен принимает в целых точках целые значения. Для какого наименьшего n можно утверждать, что разность каких-то двух внесённых многочленов является многочленом с целыми коэффициентами?

Интерполяционный многочлен Лагранжа выдаёт нам ответ в другом виде.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n}(y_k \cdot \prod_{0 \leqslant i \leqslant n i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}).$$

4. а) Для произвольных различных a, b, c, d докажите, что

$$\frac{a(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b(c+d+a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c(d+a+b)}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0.$$

б)

5. Про различные a, b, c известно, что $\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b} = 0.$

а) Докажите, что $\dfrac{a}{(b-c)^2} + \dfrac{b}{(c-a)^2} + \dfrac{c}{(a-b)^2} = 0.$

Докажите, что $\dfrac{a^2}{(b-c)^2} + \dfrac{b^2}{(c-a)^2} + \dfrac{c^2}{(a-b)^2} = 2.$

6. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами степени n, значения которого в точках $0, 1, \dots n$ являются различными степенями двойки?

7. Многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами при всех натуральных аргументах принимает значения, дающие остаки 57 или 179 при делении на 2017, причём оба остатка присутствуют. Докажите, что его степень хотя бы 2016.

8. Дано натуральное число $n > 3$. Назовём набор из n точек на координатной плоскости допустимым, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ разделяет допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже —- нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из n точек можно разделить многочленом степени не более k?

9. Будем называть многочлен $p(x)$ почти целозначным, если $p(2^k)$ -— целое число для любого целого неотрицательного k.

а) Докажите, что многочлен $p_k(x) = 2^{-k(k-1)/2} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2^{k-1})}{(2-1)(2^2-1)\cdots(2^k-1)}$ является почти целозначным.

б) Сформулируйте и докажите аналог утверждения из пункта 2а).

10. Найдите в замкнутом виде значение выражения

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{(2^k - 3^1)(2^k - 3^2)\dots(2^k - 3^{1000})}{(2^k - 2^1)(2^k - 2^2)\dots(2^k - 2^{k-2})(2^k - 2^{k+1})\dots(2^k - 2^{1000})}.$$