Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-1.

Серия 13. То, что не успели на сборах.

1. Существует ли такое натуральное n, что для любого натурального a число a^n+n составное?

2. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число am^2+bn^2 является полным квадратом. Докажите, что $ab=0$.

3. Даны $n>2$ действительных чисел, сумма которых равна 0, а сумма квадратов равна n. Докажите, что найдутся два числа, произведение которых не превосходит -1.

4. Пусть a, b, c – натуральные числа. $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что какие-то два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a+b+c$.

5. Найдите все такие тройки натуральных чисел a, b и c, что $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$, а числа a^2+1 и b^2+1 — простые.

6. При каких натуральных n для каждого натурального $k \geqslant n$ существует натуральное число с суммой цифр k, делящееся на n?

7. Пусть $n \geqslant a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ — натуральные числа такие, что $(a_i, a_j) \leqslant n$ при любых i и j. Докажите, что $ia_i \leqslant n$ при всех i.

8. Дан многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Докажите, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует простое p такое, что $p^m | P(x)$ для какого-то $x \in \mathbb{Z}$.

Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-1.

Серия 13. То, что не успели на сборах.

1. Существует ли такое натуральное n, что для любого натурального a число a^n+n составное?

2. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число am^2+bn^2 является полным квадратом. Докажите, что $ab=0$.

3. Даны $n>2$ действительных чисел, сумма которых равна 0, а сумма квадратов равна n. Докажите, что найдутся два числа, произведение которых не превосходит -1.

4. Пусть a, b, c – натуральные числа. $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что какие-то два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a+b+c$.

5. Найдите все такие тройки натуральных чисел a, b и c, что $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$, а числа a^2+1 и b^2+1 — простые.

6. При каких натуральных n для каждого натурального $k \geqslant n$ существует натуральное число с суммой цифр k, делящееся на n?

7. Пусть $n \geqslant a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ — натуральные числа такие, что $(a_i, a_j) \leqslant n$ при любых i и j. Докажите, что $ia_i \leqslant n$ при всех i.

8. Дан многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Докажите, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует простое p такое, что $p^m | P(x)$ для какого-то $x \in \mathbb{Z}$.