# Серия 12. Что-то по мотивам сборов.

**БМ-4(Саша Кудрявцев).** Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности?

**БМ-7(Никто:
Задача:).** Does there exist an infinite set $M$ consisting of positive integers such that for any $a, b \in M$ with $a < b$ the sum $a + b$ is square-free? Note. A positive integer is called square-free if no perfect square greater than 1 divides it.
*Подсказка: предположим, выбрано $n$ чисел. Какая "доля"чисел запрещена для добавления?*

**КВ-5(Никто).** Даны взаимно простые числа $x$ и $y$. Простое число $p$ — делитель числа $x^2 + xy + 41y^2$. Докажите, что существуют такие целые $a$ и $b$, что $a^2 + ab + 41b^2 = p$.

**КВ.**2-4. Дан многочлен $f(x) = x^3 + 14x^2 - 2x + 1$. Скажем, что $f_n(x)$ — это композиция $n$ многочленов $f$. Докажите, что для некоторого $n$ для любого целого $x$ верно $f_n(x) - x$ делится на 101.

**КВ2-5.** Последовательность $\{x_n\}$ определена рекурсивно: $x_1 = a$ при некотором натуральном $a$, а также $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Пусть $y_n = 2^{x_n} - 1$. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности $\{y_n\}$?

**КВ2-6.** Может ли число $n^7 + 7$ быть точным квадратом?

**КВ2-7.** Найдите такие простые $p$ и $q$, что $p^2 + 1 | 2003^q + 1$ и $q^2 + 1 | 2003^p + 1$.

**Всякое-3 (многие).** Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ число $2^{2^{2^{\cdots^{2}}}} - 2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}$ (в первом числе $n$ двоек, а во втором $n-1$) делится на $n$.

**Всякое-5 (многие).** Можно ли расставить цифры 0, 1 и 2 в клетках листа клетчатой бумаги размером $100 \times 100$ таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике размером $3 \times 4$, стороны которого идут по сторонам клеток, были бы три нуля, четыре единицы и пять двоек?

**Всякое-7 (семеро).** На бесконечной доске, разделённой на равные правильные треугольники двое играют в крестики-нолики (ставя их внутрь треугольников). При каком максимальном $k$ первый может гарантированно выставить $k$ крестиков подряд?

**Всякое-8 (четверо).** На плоскости выбраны 101 синяя и 101 красная точка, причем никакие три не лежат на одной прямой. Сумма попарных расстояний между красными точками равна 1 (то есть сумма длин отрезков с концами в красных точках), сумма попарных расстояний между синими тоже равна 1, а сумма длин отрезков с концами разных цветов равна 400. Докажите, что можно провести прямую, отделяющую все красные точки от всех синих.

**Всякое-9 (трое).** В двудольном графе степень каждой вершины не превосходит 15. Докажите, что можно все рёбра покрасить в 15 цветов так, чтобы из каждой вершины не выходило два ребра одного цвета.

**Всякое-10 (Саша Кудрявцев).** Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$. В некоторых клетках лежат камни. Если на $i$-ой клетке ($i > 0$) лежит ровно $i$ камней, то разрешается снять их с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i-1, i-2, \ldots, 0$. Леша разложил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Каким может быть минимальный номер клетки, на которой лежит камень?

**Г1.** В пространстве даны прямая $l$ и точка $A$, не лежащая не ней. $XY$ — общий перпендикуляр к прямой $l$ и произвольной прямой $AY$ ($X$ лежит на $l$). Найдите ГМТ $Y$ по всем возможным прямым, проходящим через $A$.

**Г2.** Тетраэдр $ABCD$ с остроугольными гранями вписан в сферу с центром $O$. Перпендикуляр из точки $O$ на плоскость $ABC$ пересекает описанную сферу тетраэдра в точке $D'$, причём отрезок $DD'$ пересекает плоскость $ABC$ в точке $P$. Докажите, что если $\angle APB = 2\angle ACB$, то $\angle ADD' = \angle BDD'$.

**Г3.** Даны точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ общего положения такие, что

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3.$$

Обозначим через $O_i$ центр описанной окружности треугольника $A_{jkl}$, где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Докажите, что прямые $A_iO_i$ пересекаются в одной точке или параллельны.

**Г4.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть $P$ и $Q$ — точки пересечения лучей $BA$ и $CD$, $BC$ и $AD$ соответственно, а $H$ — проекция $D$ на $PQ$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников $ADP$ и $CDQ$ видны из точки $H$ под равными углами.

**П++-1.** Let $F = A_0A_1...A_n$ be a convex polygon in the plane. Define for all $1 \leqslant k \leqslant n-1$ the operation $f_k$ which replaces $F$ with a new polygon $f_k(F) = A_0A_1..A_{k-1}A'_kA_{k+1}...A_n$ where $A'_k$ is the symmetric of $A_k$ with respect to the perpendicular bisector of $A_{k-1}A_{k+1}$. Prove that $(f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ ... \circ f_{n-1})^n(F) = F$.