Серия 11. Теорема Ван дер Вардена. Вторая часть.

1. Даны натуральные числа n и r. Достаточно большой клетчатый квадрат (размером $W_2(n,r)$) покрашен в r цветов. Докажите, что найдутся n строк, отстоящих друг от друга на расстоянии l, и n стобцов, отстоющих друг от друга на расстоянии l, что на пересечении этих n строк и n столбцов стоят клетки одного цвета.

2. В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены целые числа. Докажите, что найдётся квадрат, сумма чисел в котором делится на 2019.

3. Для чисел $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$, $b_1, b_2 \dots b_n$ Назовём *шаблоном* размера $n \times n$ множество клеток, являющиеся пересечением строки с номером a_i и столбца с номером b_j, где $i \neq j$. Назовём шаблон *симметричным*, если $a_i = b_i$ для любого i.
а) Докажите, что при покраске клетчатой плоскости в r цветов найдётся одноцветный симметричный шаблон размера $n \times n$.
б*) Назовём симметричный шаблон *равномерным*, если a_i образуют арифметическую прогрессию. Верно ли, что всегда есть одноцветный равномерный симметричный шаблон?

4. Плоскость покрашена в r цветов. Докажите, что найдётся правильный 2019-угольник, все вершины которого покрашены в один цвет.

5. Дано натуральное число k. Докажите, что для любого действительного θ существует такое натуральное n, что θn^k отличается от целого менее чем на 10^{-100}.

6. Дано натуральное число n. Докажите, что для достаточно большим простых p сравнение $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$ разрешимо по модулю p.

7(Кто решит, получит от меня креативную футболку, а ещё почёт и уважение, которые правда у многих из вас и так есть). Назовём множество чисел S *структурным* порядка k, если существуют такие натуральные $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, что элементы S — это в точности суммы чисел в подмножествах a_i. Например, множество чисел $\{1, 2, 3, \dots 1023\}$ структурное порядка 11 ($a_i = 2^{i-1}$). Множество чисел $\{1, 2, \dots 66\}$ тоже является структурным порядка 11 ($a_i = i$). Докажите, что для любых натуральных r и k существует такое $F(r,k)$, что при любой покраске чисел от 1 до $F(r,k)$ в r цветов найдётся одноцветное структурное множество порядка k.