Серия 10. Такая разная теория чисел.

Старое.

3-1(не гроб). Обозначим A множество всех простых чисел, делящих $2^n - 3$. Докажите, что A и $\mathbb{P} \setminus A$ — бесконечные.

3-2(не гроб). Натуральные числа m и n таковы, что $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$. Докажите, что m и n не взаимно простые.

3-3(не гроб). Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей.

а) Сколько существует попарно несравнимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - 1$ делится на n?

б) Докажите, что существует такое натуральное число a, что $1 < a < \frac{n}{k} + 10$ и $a^2 - a$ делится на n.

3-4(Разбирали в 10-ом классе). Число 3^{2019} начинается с двойки и содержит ещё 963 цифры. А какое наибольшее количество единиц подряд содержится в десятичной записи числа $\frac{1}{3^{2019}}$?

3-5(гроб, так и быть). Рассмотрим последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, заданную рекуррентно $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$.

а) Докажите, что в десятичной записи числа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_{2k}}$ содержится любая конечная последовательность цифр.

б) Докажите, что в десятичной записи числа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_k}$ содержится любая конечная последовательность цифр.

Новое

1. Найдите все такие натуральные k, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 19^n$ делится на k.

2. Для каких простых p все числа вида $4n^2 + p$ — простые для любого $n = 1, 2, \ldots, p - 1$?

3. Назовём натуральное число *неудачным*, если его нельзя представить в виде $n = \frac{x^2-1}{y^2-1}$ при натуральных $x, y > 1$. Конечно или бесконечно множество неудачных чисел?

4. Найдите все такие простые p и натуральные k, что $p^2 - p + 1 = k^3$.

5. Let $P(x)$ be a polynomial of degree $n > 1$ with integer coefficients and let k be a positive integer. Consider the polynomial $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, where P occurs k times. Prove that there are at most n integers t such that $Q(t) = t$.

6. Существует ли N делящееся ровно на 2019 различных простых чисел такое, что N делит $2^N + 1$?