Серия 38. Разнобой. Решения

1. Возьмём произвольную арифметическую прогрессию. Вычислим произведение её членов. Домножим все элементы на это произведение. Теперь произведение всех членов прогрессии - точная 2017 степень. Если теперь домножать каждый элемент этой прогресии на 2^{2017k}, то будут получаться новые прогрессии. Докажите, что существует бесконечно много непостоянных целочисленных арифметических прогрессий, состоящих из 2016 членов, таких, что в каждой из них произведение всех членов является точной 2017-й степенью натурального числа.

2. Допустим 50 чисел так выбрать нельзя. Тогда каждому набору из 50 чисел, соответствует набор из 49, для которого эти 50 нарушают условие. Очевидно это разные наборы. Но, $C_{100}^{50} > C_{100}^{49}$, противоречие.

3. От противного пусть n не кратно 49, но кратно 7. Надеюсь, вы знаете формулу для суммы делителей числа. Для $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ это $(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{\alpha_1})\dots(1+p_m+p_m^2+\dots+p_m^{\alpha_m})$. По условию нам дано что вот это все произведение равно $2n$, потому что сумма всех делителей кроме n равна n. А еще мы знаем, что скобка соответствующая числу 7 равна 8(потому что там написано 1+7, и больше ничего). Откуда получаем, что n кратно 4. В целом нам этого хватит. Пусть $n = 28k$, тогда у n есть делители $k, 2k, 4k, 7k, 14k$, - в сумме ровно n, единственный шанс не иметь больше делителей у нашего числа, это быть равным 28(по условию число больше 28). Противоречие.

4. Указание: Выписать соотношения на площади.

5. (в рамках всей задачи рассуждения, конечно, по модулю 4) Докажем по индукции. Предположение индукции: Среди n чисел Хан может сделать делящимися на 4 по-крайней мере $n-2$. База: $n = 2$ - очевидна. Шаг: Пусть для всех чисел $\leqslant k$ доказано, докажем для $k+1$. Если хотя бы одно из чисел с краю делится на 4, то мы можем работать с остальными, по предположению мы умеем получать из них $k-2$ кратных 4, и ещё одно с краю, итого $k-1$. Значит теперь решаем в предположении что Банах не дает нам сделать крайние нулем. Делаем оба крайних нечётными.(выбирая крайнее число, если оно четно мы этого добьемся) Если при этом левое и правое не равны, то можно выбрать весь ряд чисел, и тогда одно из них обнулится. Победа. Значит можно считать что они равны, и, не ограничивая общности, равны 1. Давайте поймем какую операцию мы себе только что заработали. Мы можем брать любой начальный кусок (не из всех чисел), и, оппонент, вынужден прибавлять 1. Потом мы выбираем первое число, он вынужден вычитать 1. Значит мы умеем на любом подотрезке с левым концом во втором числе прибавлять 1. С помощью этой операции легко сделать середину равной 0(надо обнулять числа, начиная с предпоследнего). То есть $n-2$ числа. Шаг доказан.

6. Давайте для начала докажем, что существует квардат, последние 100 цифр которого единицы и двойки. Предположение индукции: Существует число, у квадрата которого последние n цифр единицы и двойки, причем, последняя - единица. База: $1^2 = 1$, $11^2 = 121$. В шаге начнем с тройки. Шаг: Доказываем для n, пусть, наше подходящее число для $n-1$ цифр - A. Рассмотрим выражение $(A + x \cdot 10^n)^2 = A^2 + 2x \cdot 10^n + 10^{2n} \cdot x^2$ по модулю 10^{n+1} последнее слагаемое равно 0. Поэтому один из $x = 0, 1, 2, 3, 4$ нам подойдет. При этих x $n+1$-ая цифра увеличится на $0, 2, 4, 6, 8$ соответственно. Ровно в одном из случаев она окажется 1 или 2. Шаг доказан Отлично. Пусть B - число, последние 100 цифр квадрата которого единицы и двойки. Давайте оставим от B последние 100 цифр, на последние 100 цифр квадрата это не повлияет, полученное число назовем C. Рассмотрим числа от $C + 10^{1000}$ до $C + 2 \cdot 10^{1000}$, но не на все подряд, а с шагом 10^{100}. Ясно, что первые 100 цифр квадрата первого, это единица и 99 нулей, а второго двойка и 99 нулей. А ещё, ясно, что разность между соседними квадратами в этом списке небольшая (порядка 10^{1100}), поэтому на первые 100 разрядов, это влияет так: они либо не меняеются, либо числа образованное ими увеличиваетя всего на 1. Поэтому нужный

нам набор из 100 цифр в начале мы получим.

7. Пусть $xy = a^2$ и $zt = b^2$, и, предположим $z = max\{x, y, z, t\}$ (надеюсь всем ясно, что z,t - крайние числа) Тогда

$$xy - zt = (a-b)(a+b) = x + y = xy - z(x+y-z) = (z-y)(z-x)$$

Значит $(a-b)(a+b) = (z-x)(z-y)$ Можно подобрать такие, что $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ such that $a - b = mn, a + b = pq, z - x = mp, z - y = nq$ (где-то видел что это называли леммой о 4 числах, но я про такую не слышал, впрочем тут вроде бы очевидно, если через основную теорему арифметики расписать). Тогда $x+y = mnpq, 4a^2 = 4xy = (mn+pq)^2$ и $y-x = mp-nq$ Поскольку $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ то

$$(mn + pq)^2 = (mnpq)^2 - (mp - nq)^2 \iff (mnpq)^2 = (m^2 + q^2)(n^2 + p^2)$$

Утверждение: $(m-1)(q-1) = 0$ и $(p-1)(n-1) = 0$

Доказательство: Если $m, n, p, q > 1$ то $m^2 + q^2 < m^2q^2$ т $p^2q^2 < p^2 + q^2$ противоречие. Значит хотя бы одно из них 1 . Предположим, что $(p-1)(n-1) \neq 0$ или $(m-1)(q-1) \neq 0$. БОО $m = 1$, $n > 1, p > 1$ Пусть $(n^2 - 2)(p^2 - 2) \geq 4 \iff n^2p^2 \geq 2(n^2 + p^2) \Rightarrow q^2 + 1 \geq 2q^2$ мы должны получить, что $q = 1$ $n^2p^2 = 2(n^2 + p^2) \iff (n^2 - 2)(p^2 - 2) = 4 \Rightarrow p = q = 2$. Тогда $x + y = mnpq = 4$ и $xy = a^2 = 4$ так $zt = xy - x - y = 4 - 4 = 0$ что неверно. Утверждение доказано.

БОО $m = 1$ и $n = 1$ Пусть $(pq)^2 = (p^2 + 1)(q^2 + 1) = p^2q^2 + p^2 + q^2 + 1$ чего не может быть.

Значит xy и zt не могут быть оба полными квадратами.