Серия 33. Интеграл: существует.

1(письменная). Докажите, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n$.

2. В квадрате со стороной 1 отмечено n фигур площади 1/2. Площадь пересечения любых двух из них равна 1/4. Докажите, что площадь непокрытой части не более $\frac{1}{n+1}$.

3(письменная). а) Докажите, что $\int\limits_0^1 x^n(1-x)^n dx < \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
б) Докажите, что НОК$[n+1, n+2, \ldots 2n+1] > 4^n$.
в) Докажите, что если чисел от 1 до $2n+1$ ровно k простых, то $(2n+1)^k > 4^n$ и получите отсюда оценку на k-тое простое число.

4(письменная). На столе лежат несколько часов со стрелками. Известно, что все стрелки перемещаются с постоянной угловой скоростью, но для каждых часов она может быть своя. Докажите, что любой точки найдётся такой момент времени, что сумма расстояний от неё до концов “минутных” стрелок больше, чем сумма расстояний от неё до центров.

5. В пространстве расположены выпуклые тела U и V. Верны ли следующие утверждения?
а) Для любой плоскости, перпендикулярной оси Oz, площади сечений U и V этой плоскости равны. Тогда объёмы тел U и V равны.
б) Для любой плоскости, перпендикулярной оси Oz, длина границ сечений U и V этой плоскостью равны. Тогда площади поверхности тел U и V равны.

6. Круг диаметра 1 покрыли конечным множеством прямоугольников. Может ли сумма меньших длин прямоугольников быть меньше 1?

Теория, которая может помочь.

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$. Разобьём отрезок $[a, b]$ на несколько меньших отрезков $\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]$, где $i \in [1; n]$, $a_0 = a$, $a_n = b$. Если длина каждого отрезка меньше δ, скажем, что разбиение мельче δ. Выберем точки $s_i \in \Delta_i$. Разбиение, для которого зафиксированы точки s_i в отрезках будем называть *отмеченным разбиением.*

Определим $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot |\Delta_i|$, будем называть такие выражения *интегральными суммами.*

Комментарий покороче: знак модуля в обозначении длины $|\Delta_i|$ вполне можно опускать, хотя полезно понимать, что в этот момент немного теряете формального и педантичного лоска в обозначениях. Но иногда полезно жертвовать им, чтобы справиться с нагромаждением значков и формул.

Комментарий подлиннее. Вообще здесь не хочется давать наиболее строгие и формальные определения и обозначения, кто-то из вас с ними уже сталкивался, кто-то ещё столкнётся в ближайшем будущем, скорее очень хочется, чтобы за формулами вы поняли суть. В равенстве выше это не написано явно, но подразумевается, что интегральные суммы зависят от f от разбиения на отрезка и от того, какие точки выбираем, но у σ не написаны аргументы. Не написаны они по причине изложенной абзацем выше.

Число I называется *интегралом (или интегралом Римана, если угодно)* функции f на отрезке $[a; b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого отмеченного разбиения мельче δ имеет место неравенство $|\sum\limits_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta_i - I| < \varepsilon$.

Обозначается интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Многие из вас вероятно слышали, что интеграл — это площадь под графиком функции. И как будто эта связь делает понятие интеграла более ясным и простым. В реальности же эта связь говорит, что понятие площади не такое простое, как кажется.

Но какую я бы здесь предложил углядеть идеологию. Если коротко, то “разделяй и властвуй”. Если более развёрнуто, то чтобы как-то подсчитать что-то в непрерывном мире нужно приблизить его дискретным. Сейчас будет не совсем строго, но грубо говоря, если вы хотите посчитать площадь фигуры, заполните её насколько сможете непересекающимися прямоугольниками и посчитайте площадь их, если хотите найти длину кривой, впишите в неё ломаную, чтобы содержала как можно больше точек кривой, если хотите найти проанализировать какое-то поведение функции на какой-то области, то разбейте область на мелкие кусочки и считайте, что на каждом из них функция постоянная (интеграл как раз так и делает).

У интеграла очень много свойств. Он линеен по функциям, аддитивен по отрезкам. На моих лекциях в университете эти свойства доказывали больше часа. Они кажутся очевидными и я всерьёз думаю, что если понимать, как работают доказательства с пределами, то все эти доказательства однотипные, поэтому приводить их тут не буду.

А напомню вам общую идеологию доказательств с пределами (*снова небольшая наколка, поскольку надо ещё немного пошаманить, чтобы понять, что интеграл – это предел.*) или с $\varepsilon - \delta$-языком, предъявив доказательство сразу довольно содержательного факта, а именно *формулы Ньютона-Лейбница.*

Теорема. Если $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, а функция $\mathcal{F}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ такова, что $\mathcal{F}'(x) = f(x)$ на $[a, b]$, тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$$

Комментарий. Легко можно было бы дать более сильную формулировку, потребовать от f быть ограниченной с конечным числом точек разрыва на $[a, b]$, а равенству $\mathcal{F}'(x) = f(x)$ быть выполненным тоже не везде, а кроме счётного числа точек, но сейчас в этом нет смысла. Более аккуратные и универсальные факты вы узнаете и докажете (кто-то может уже), а сейчас цель немного познакомить и вероятно показать, что интеграл встречается в неожиданных местах, но в то же самое время, что это не просто какое-то махание руками.

Доказательство.

Будем доказывать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого отменченного разбиения мельче δ выполнено

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta_i - (\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a))\right| < \varepsilon$$

Чтобы буквы не путались больше никакие переменные даже в замкнутых формулах обозначать ε и δ без каких-то дополнительных индексов не будем.

По определению непрерывности $\forall t \in [a, b] \forall \varepsilon_1 > 0\, \exists \delta_t > 0\, \forall t_1 (|t - t_1| < \delta_t) \to |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon$.

Рассмотрим открытое покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами вида $(t - \frac{1}{2}\delta_t, t + \frac{1}{2}\delta_t)$, из него можно выбрать конечное подпокрытие (если вы вдруг не слышали раньше такого факта и не понимаете, почему это так, то это в принципе нормально).

Выпишем это конечное множество интервалов, покрывающих $[a, b]$.

$(t_1 - \frac{1}{2}\delta_{t1}, t_1 + \frac{1}{2}\delta_{t1}), (t_2 - \frac{1}{2}\delta_{t2}, t_2 + \frac{1}{2}\delta_{t2}), \dots (t_k - \frac{1}{2}\delta_{t_k}, t_k + \frac{1}{2}\delta_{t_k})$. Обозначим минимальное из $\delta_{t1}, \delta_{t2} \dots \delta_{tk}$ как $4\delta_1$. Что мы поняли? Что если разница между двумя числами из отрезка $[a, b]$ меньше δ_1, то разница значений функции f в них меньше $2\varepsilon_1$. Действительно, если $|u - v| < \delta_1$, то u попадает в какой-то интервал из подпокрытия, например в $(t_m - \frac{1}{2}\delta_{tm}, t_m + \frac{1}{2}\delta_{tm})$, но тогда и u, и v попадают в интервал $(t_m - \delta_{tm}, t_m + \delta_{tm})$, а, значит, $|f(u) - f(t_m)| < \varepsilon_1$, $|f(v) - f(t_m)| < \varepsilon_1$, а следовательно по неравенству треугольника $|f(u) - f(v)| < 2\varepsilon_1$.

Только что мы доказали, что непрерывная функция на отрезке является равномерно непрерывной.

Рассмотрим любое отмеченное разбиение, мельче δ_1.

Перепишем $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}(a_i) - \mathcal{F}(a_{i-1})$.

Каждое слагаемое по формуле Лагранжа равно $(a_i - a_{i-1}) f(\theta_i)$, где θ_i некоторая внутренняя точка отрезка $[a_{i-1}, a_i]$.

Поэтому сумму, про которую надо понять, что она меньше ε, можно переписать

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta_i - (\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a))\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} (f(s_i) - f(\theta_i)\Delta_i\right| < \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot max|f(s_i) - f(\theta_i)| =$$

$$= (b - a) \cdot max|f(s_i) - f(\theta_i)| < 2(b - a)\varepsilon_1$$

Что же получилось? Для произвольного ε_1 подбираем соответствующее δ_1 так, чтобы модуль разности был меньше $2(b - a)\varepsilon_1$. Если взять ε_1 такое, чтобы $2(b - a)\varepsilon_1$ было меньше ε, то соответствующее δ_1 подойдёт в качестве δ.

Конец доказательства.

Комментарий. Вместо ссылки на формулу Лагранжа можно было заменить приращение функции на отрезке на значение производной в его начале, умноженную на длину. Это дало бы погрешность, и надо бы было аккуранто отследить, что сумму таких погрешностей можно хорошо оценить. Это более трудоёмкий способ, но возможно более "честный", то есть полнее передаёт связь между интегралом и производной.