Серия 25. ТЧ и немного тригонометрии

1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.

2. Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \cos 5\alpha$ рациональны?

3. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p+1$ делится на q, а $7q+1$ делится на p.

4. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

5. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20n+13n$ делится на k.

6. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки

7. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число

8. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?