Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-2.

Серия 18. Линейность

1. a) По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 2.

b) Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128

2. По окружности расставлены p целых чисел (p — простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2013}.

3. Дана таблица, в которой $n+1$ строка и n столбцов. В некоторых клетках таблицы сидят зайчики. Докажите, что можно выбрать непустой набор строк так, чтобы в каждом столбце в выбранных строках находилось чётное число зайчиков.

4. Имеется $n+1$ непустых подмножеств n элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих

5. В каждой клетке таблицы размером 4×4 стоит знак «+» или «−». Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такие операции?

6. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$

Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-2.

Серия 18. Линейность

1. a) По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 2.

b) Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128

2. По окружности расставлены p целых чисел (p — простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2013}.

3. Дана таблица, в которой $n+1$ строка и n столбцов. В некоторых клетках таблицы сидят зайчики. Докажите, что можно выбрать непустой набор строк так, чтобы в каждом столбце в выбранных строках находилось чётное число зайчиков.

4. Имеется $n+1$ непустых подмножеств n элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих

5. В каждой клетке таблицы размером 4×4 стоит знак «+» или «−». Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такие операции?

6. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$