Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **28.11.2019**

Серия 17. Стереометрия

— Экая жалость! — бормотал он. — Ведь этакая, скажи на милость, глупость с моей стороны!
— Да что такое? — спросил Пивомедов.
— Зачем я стереометрию учил, ежели ее в программе нет? Ведь целый месяц над ней, подлой, сидел. Этакая жалость!

А.П. Чехов, «Экзамен на чин»

1. Аскар разобрал каркас треугольной пирамиды в кабинете математики и хочет из её шести рёбер составить два треугольника так, чтобы каждое ребро являлось стороной ровно одного треугольника. Всегда ли Аскар сможет это сделать?

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ ($ABCDEF$ — основание) боковое ребро равно a, плоский угол при вершине S равен $10°$. Муравей ползёт по поверхности пирамиды из вершины A, стремится побывать на всех боковых ребрах (возможно в вершинах) и вернуться в точку A. Какова длина его кратчайшего пути?

3. Дан тетраэдр $ABCD$, все грани которого являются подобными прямоугольными треугольниками с острыми углами при вершинах A и B. Ребро AB равно 1. Найдите длину наименьшего ребра тетраэдра.

4. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

5. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

6. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?

7. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF. Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности, и точки A, B, D и F лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны.

8. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере