

Тетраэдры: прямая Эйлера, сферы 12 и 24 точек

Так как тетраэдры являются в каком-то смысле пространственными аналогами треугольников, то интересно посмотреть на некоторые факты, аналогичные тем, которые встречаются в геометрии треугольника. Наиболее полные аналогии возникают при рассмотрении ортоцентрического тетраэдра, так как только в нем высоты пересекаются в одной точке. В частности, в ортоцентрическом тетраэдре существует почти полная аналогия с прямой Эйлера треугольника.

Теорема. *В ортоцентрическом тетраэдре центроид является серединой отрезка, соединяющего его ортоцентр и центр описанной около него сферы.*

Доказательство. Пусть H – ортоцентр, M – центроид, O – центр описанной сферы тетраэдра $DABC$ (см. рис. 1). Тогда $\overline{OM} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$.

Для того чтобы доказать требуемое достаточно доказать, что $\overline{OH} = 2\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$.

Действительно, пусть точка X такова, что $\overline{OX} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$.

Тогда $\overline{AX} = \overline{OX} - \overline{OA} = \frac{1}{2}(-\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) =$

$$\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{OC} + \overline{OD}). \quad \overline{AX} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{OC} + \overline{OD})\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} + (\overline{OD} + \overline{OC})(\overline{OD} - \overline{OC}) = 0.$$

Следовательно, $\overline{AX} \perp \overline{CD}$. Аналогично доказывается, что $\overline{AX} \perp \overline{BC}$, поэтому прямая AX содержит высоту тетраэдра. Таким же образом получим, что прямые BX , CX и DX содержат высоты тетраэдра, то есть точка X совпадает с H .

Следовательно, **OH – прямая Эйлера для ортоцентрического тетраэдра.**

Другие аналогии для ортоцентрического тетраэдра – см. задачи 5 – 8. Остальные задачи содержат факты, аналогичные планиметрическим, для произвольных тетраэдров или других его видов. В случае затруднений вам могут помочь аналогичные факты или задачи планиметрии.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 – 8 постарайтесь найти планиметрические аналоги.

1. На каждой грани правильного тетраэдра с ребром 1 во внешнюю сторону построены правильные тетраэдры. Четыре их вершины, не принадлежащие исходному тетраэдру, образовали новый тетраэдр. Найдите его ребра.

2. Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной сфер тетраэдра, a – длина его наибольшего ребра, H – длина наименьшей высоты тетраэдра. Докажите, что $\frac{R}{r} > \frac{a}{H}$.

3. В тетраэдре $PABC$ проведены биссектрисы PA_1 , PB_1 и PC_1 треугольников PBC , PAC и PAB соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда равны произведения длин противоположных ребер тетраэдра.

5. Точки H и O – ортоцентр и центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра $DABC$ соответственно. Докажите, что: а) $\overline{HO} = \frac{1}{2}(\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} + \overline{HD})$;

б) середины любых двух скрещивающихся ребер этого тетраэдра вместе с точками O и H являются вершинами параллелограмма;

в) $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$, где R – радиус описанной сферы, d – длина бимедианы;

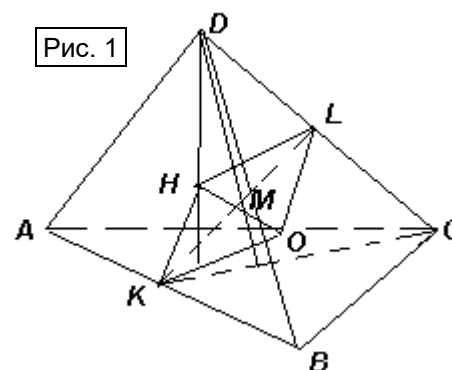


Рис. 1

г) $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$.

6. а) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре окружности девяти точек всех граней лежат на одной сфере.

б) Объясните, почему эту сферу назвали **сферой двадцати четырех точек**.

7. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центроиды граней, ортоцентры граней, а также точки, которые делят отрезки, соединяющие ортоцентр тетраэдра с его вершинами, в отношении 2 : 1 (считая от вершины) лежат на одной сфере, которая называется **сферой двенадцати точек**.

8. Пусть M и H – центроид и ортоцентр какой-либо грани ортоцентрического тетраэдра, K и N – точки пересечения лучей HM и $H'M$ соответственно с описанной около тетраэдра сферой. Докажите, что: а) $\frac{HM'}{M'K} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{H'M}{MN} = \frac{1}{3}$.

9. Сфера, вписанная в тетраэдр $SABC$, касается граней SAB , SBC и SCA в точках D , E и F соответственно. Какие значения может принимать сумма углов SDA , SEB и SFC ?

10. Высота равногранного тетраэдра равна h , а высота грани делится ортоцентром этой грани на отрезки, равные h_1 и h_2 . Докажите, что $h^2 = 4h_1h_2$.