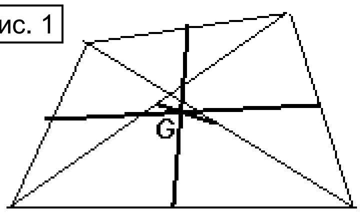
**23.04.19**

## Замечательные точки и линии четырехугольников

*Использованы материалы Д. Швецова и А. Мякишева.*

Рис. 1




Мы уже встречались с некоторыми интересными точками и прямыми в четырехугольниках. Например, центроид $G$ четырехугольника – точка пересечения его средних линий. Она же – середина отрезка, соединяющего середины диагоналей (см. рис. 1). Почему? [Единственность центроида системы точек] Кроме того, в задачах различных занятий возникали прямые Гаусса, Ньютона, Обера - Штейнера. Эти задачи, в свое время, почти никто не решил, поэтому я вновь их включил в концовку задач этого занятия.

Напомню, что в геометрии треугольника большую роль играет связь между центроидом, ортоцентром и центром описанной окружности (прямая Эйлера), а также окружность девяти точек. В первой части задач этого занятия рассматриваются различные обобщения этих понятий для четырехугольника (сначала для вписанного, а потом для произвольного).

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

**1.** (*Ортоцентр вписанного четырехугольника*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть $H_a$, $H_b$, $H_c$ и $H_d$ – ортоцентры треугольников $BCD$, $ACD$, $ABD$ и $ABC$ соответственно. Докажите, что:

а) отрезки $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ и $DH_d$ пересекаются в одной точке $H$ (*ортоцентре*).

б) четырехугольник $H_a,H_bH_cH_d$ равен четырехугольнику $ABCD$.

**2.** (*Теорема Монжа*) Докажите, что перпендикуляры, проведенные из середин вписанного четырехугольника к противолежащим сторонам, пересекаются в ортоцентре $H$ этого четырехугольника.

**3.** (*Прямая Эйлера вписанного четырехугольника*) Докажите, что во вписанном четырехугольнике центроид $G$, центр $O$ описанной окружности и ортоцентр $H$ лежат на одной прямой и $G$ – середина отрезка $OH$.

**4.** (*Окружность Эйлера вписанного четырехугольника*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть $O_a$, $O_b$, $O_c$ и $O_d$ – центры окружностей девяти точек треугольников $BCD$, $ACD$, $ABD$ и $ABC$ соответственно. Докажите, что:

а) эти центры лежат на одной окружности;

б) все указанные окружности пересекаются в ортоцентре $H$ четырехугольника.

**5.** (*Точка Понселе четырехугольника*) Докажите, что в любом четырехугольнике $ABCD$ окружности девяти точек треугольников $BCD$, $ACD$, $ABD$ и $ABC$ пересекаются в одной точке.

**6.** (*Квазицентр описанной окружности четырехугольника*) Пусть $P$ – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, $M$ – его центроид, $O$ – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, $H$ – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников $APD$ и $BPC$, $APB$ и $CPD$. Докажите, что $M$ – середина отрезка $OH$.

**7.** а) (*Прямая Ньютона*) Докажите, что во всяком описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

б) Докажите, что центр $O$ окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, у которого нет параллельных сторон, совпадает с его центроидом тогда и только тогда, когда $OA\cdot OC = OB\cdot OD$.

**8.** (*Прямая Гаусса*) Докажите, что если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

**9**. (*Прямая Обера – Штейнера*) Продолжения сторон $AB$ и $CD$ четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $F$, а продолжения сторон $BC$ и $AD$ – в точке $E$. Докажите, что:

а) ортоцентры треугольников $ABE$, $CDE$, $ADF$ и $BCF$ лежат на одной прямой.

б) эта прямая перпендикулярна прямой Гаусса.

**10.** (*Четырехугольник как однородная пластина*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $G_a$ и $H_a$, $G_b$ и $H_b$, $G_c$ и $H_c$, $G_d$ и $H_d$ – центроиды и ортоцентры треугольников $BCD$, $ACD$, $ABD$ и $ABC$ соответственно. $G$ – точка пересечения прямых $G_aG_c$ и $G_bG_d$, $H$ – точка пересечения прямых $H_aH_c$ и $H_bH_d$.

а) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром $O$. Докажите, что точки $H$, $G$ и $O$ лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$.

б) Докажите, что утверждение пункта а) справедливо для произвольного четырехугольника $ABCD$, если в качестве $O$ взять точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям.

в) (*Точка Нагеля описанного четырехугольника*) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром $I$. $N$ – точка пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности со сторонами относительно середин этих сторон. Докажите, что точки $N$, $G$ и $I$ лежат на одной прямой и $NG : GI = 2 : 1$.