16.04.19

Непрерывность в стереометрии

По книжке А. Блинков, В. Гуровиц. Непрерывность (серия «Школьные математические кружки», – М.: МЦНМО, 2015.

В стереометрических задачах так же, как и в планиметрии, непрерывность часто используется для доказательства существования объекта (без явного его предъявления). Напомню, что для грамотного изложения решения, необходимо:

1) зафиксировать некоторые точки рассматриваемой конструкции, выбрать независимую переменную и показать, каким образом изменяется положение остальных точек в зависимости от нее;

2) объяснить, почему выбранная зависимость искомой величины от выбранной переменной является непрерывной функцией;

3) показать существование значений переменной, при которых искомая величина принимает значения как меньше, так и больше искомого;

4) использовать теорему о промежуточном значении, либо ее следствия, либо ее обобщения.

Отметим, что в стереометрических задачах происходит «расширение возможностей» за счет того, что «крайними» случаями могут служить планиметрические конструкции.

Пример 1. Существует ли тетраэдр *ABCD*, в котором *AB* = *CD* = 8, *AC* = *BD* = 10, *BC* = 12, *AD* = 13?

Ответ: существует.

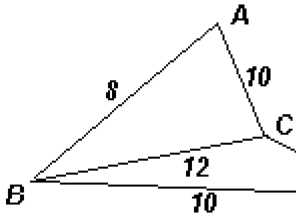

Рис. 1а

Решение. Рассмотрим в пространстве два равных треугольника: *ABC* и *DCB*, длины сторон которых соответствуют условию задачи (см. рис. 1а). Плоскости *ABC* и *DBC* образуют двугранный угол с ребром *BC*: При малых изменениях величины φ этого угла расстояние *AD* = *x* также мало изменяется, поэтому зависимость ***x*(*φ*) *является непрерывной функцией***.

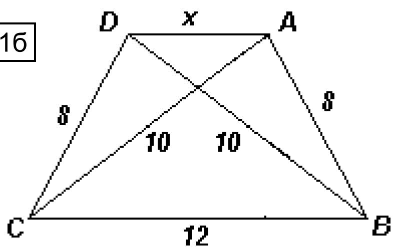

Рис. 1б

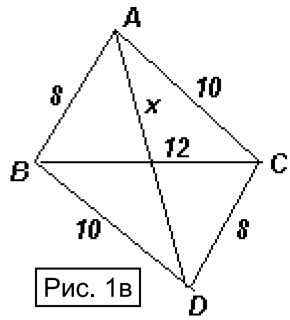

Рис. 1в

Пусть $\varphi = 0$, то есть рассматриваемые треугольники лежат в одной плоскости и симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку *BC*, то есть *ABCD* – равнобокая трапеция (см. рис. 1б). Тогда $x = AD < BC < 13$.

Пусть $\varphi = 180°$, тогда рассматриваемые треугольники опять-таки лежат в одной плоскости и образуют параллелограмм *ABDC* (см. рис. 1в). В этом случае, используя теорему о сторонах и диагоналях параллелограмма, получим: $x^2 + 12^2 = 2(8^2 + 10^2)$, откуда $x = \sqrt{184} > 13$. По ***теореме о промежуточном значении*** существует значение φ, при котором *AD* = 13, причем точки *A*, *B*, *C* и *D* являются вершинами тетраэдра.

В стереометрических задачах чаще, чем в планиметрических, используется также ***теорема о множестве значений***: ***функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения от наименьшего до наибольшего***.

Это утверждение следует из теоремы о промежуточном значении и из того, что такие функции принимают на отрезке свои экстремальные значения.

Пример 2. В пространстве дан произвольный угол *A*. Докажите, что найдется такая плоскость α, что проекцией угла *A* на α является угол величины φ, где φ принимает любое заранее заданное значение от 0 до 180°.

Решение. Пусть величина данного угла равна γ. Выберем сначала плоскость α таким образом, чтобы она была параллельна плоскости данного угла (см. рис. 2а).

Тогда ортогональной проекцией угла A на α является угол A', равный углу A, то есть угол величины γ. Проведем биссектрису угла A и будем поворачивать данный угол вокруг прямой m, содержащей биссектрису. Рассмотрим зависимость величины φ ортогональной проекции от угла поворота. При малых углах поворота величина ортогональной проекции изменяется мало, поэтому эта зависимость является ***непрерывной функцией***.

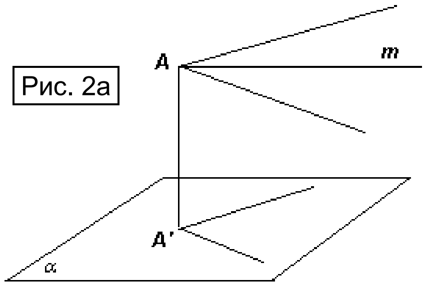

Рис. 2а

При повороте на 90° получим угол, плоскость которого перпендикулярна α (см. рис. 2б). Его проекцией на плоскость α является угол A'', величиной 0°. ***По теореме о множестве значений*** φ принимает любое значение от 0 до γ.

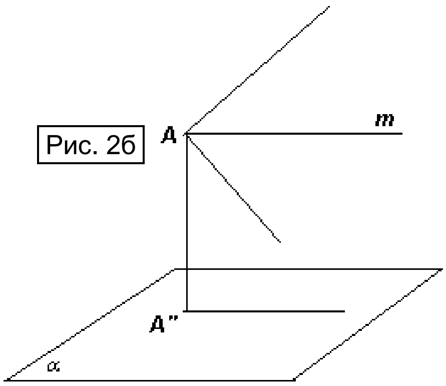

Рис. 2б

Выберем теперь плоскость α таким образом, чтобы биссектриса угла A пересекала α и была ей перпендикулярна (см. рис. 2в). Тогда ортогональной проекцией угла A на α является угол A''', равный 180°. В плоскости данного угла через вершину A проведем прямую n, перпендикулярную биссектрисе, и будем поворачивать данный угол вокруг прямой n. И в этом случае, при малых углах поворота величина φ ортогональной проекции изменяется мало, поэтому зависимость φ от угла поворота является непрерывной функцией.

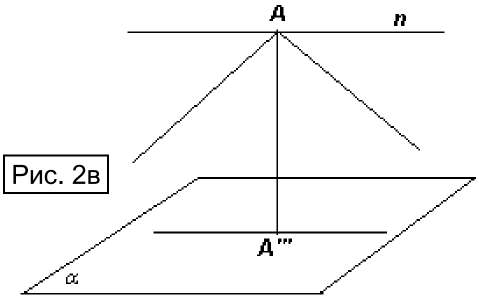

Рис. 2в

При повороте на 90° получим угол A, плоскость которого параллельна α, значит, его проекцией является острый угол A'''', равный данному, то есть угол величины γ (см. рис. 2г). ***По теореме о множестве значений*** φ принимает любое значение от γ до 180°.

Таким образом, φ может принимать любое значение от 0 до 180°.

Поясним подробнее, почему при малых поворотах исходного угла величина его ортогональной проекции меняется мало. Отложим на сторонах угла A точки B и C так, чтобы AB = AC, и будем следить за проекцией A'B'C' треугольника ABC.

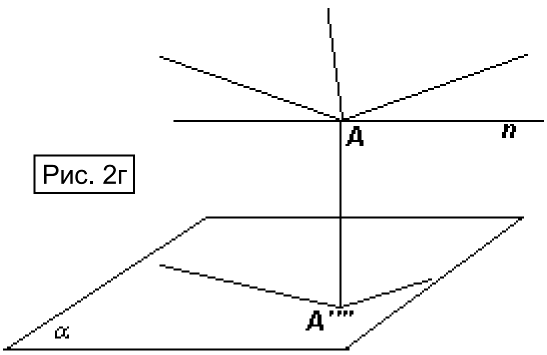

Рис. 2г

При повороте вокруг биссектрисы m высота AH треугольника ABC будет проектироваться в равную ей высоту A'H', а проекция B'C' будет непрерывно изменяться от длины BC до нуля. Поэтому и угол B'A'C' будет меняться непрерывно от γ *до нуля. При повороте вокруг прямой n, наоборот, B'C' будет оставаться равной BC, а проекция A'H' высоты будет непрерывно изменяться от нуля до AH, поэтому угол B'A'C' будет меняться непрерывно от 180° до* γ.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Существует ли точка на высоте правильного тетраэдра, из которой ребро основания видно под углом 90°?

б) Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен 75°?

2. Дан прямой двугранный угол. Можно ли провести плоскость так, чтобы она пересекла его грани по лучам, образующим угол $140°$?

3. а) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ по ребрам $A'A$ и CB из вершин A' и C соответственно одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки X и Y. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние XY, если ребро куба равно 1.

б) Две полуокружности имеют общий диаметр AB длины 2 и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки A по одной из них, и из точки B по другой, одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки X и Y. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние XY.

4. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Докажите, что у него существует четырехугольное сечение периметра 2,2.

5. Дан куб с ребром 1. Докажите, что у него существует сечения: а) четырехугольное площади 1,4; б) треугольное площади 0,8; в) пятиугольное и шестиугольное площади 1,2.

6. Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой высота равна расстоянию между серединами двух скрещивающихся ребер?

7. Существует ли тетраэдр, у которого каждая грань является тупоугольным треугольником?

8. Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырехугольником?

9. В пространстве дан треугольник, все углы которого меньше φ, где $\varphi < 120°$. Докажите, что существует точка, из которой каждая сторона треугольника видна под углом φ.

10. Дан пространственный шарнирный четырехугольник $ABCD$ (длины его сторон и их порядок – зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое его положение, при котором в тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AC и BD – прямые.