

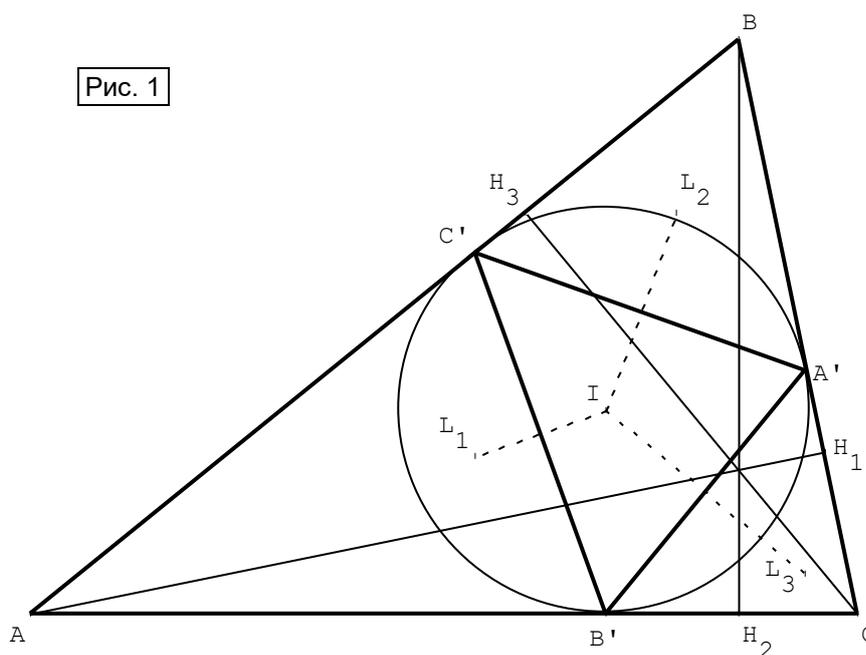
Три точки в треугольнике

По материалам Л.А. и Т.Л. Емельяновых (летняя конференция турнира городов, 2002 г.).

Рассмотрим следующую конструкцию.

Пусть вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон BC , CA и AB в точках A' , B' и C' соответственно. Отразим точку I относительно сторон треугольника $A'B'C'$ и обозначим полученные точки L_1 , L_2 и L_3 (см. рис. 1).

С ее свойствами вы познакомитесь в процессе решения задач. Конструкция «богатая», поэтому материал рассчитан на два занятия. Но если кто-то справится быстрее, то будет «добавка».



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

В условиях задач используются следующие обозначения: основания высот треугольника, проведенных из вершин A , B и C , – H_1 , H_2 и H_3 соответственно; окружность, проходящая через точки X , Y , Z – (XYZ) , O – центр описанной окружности треугольника ABC . Треугольник $A'B'C'$ называется треугольником Жергонна.

Докажите следующие факты:

1. Треугольники $L_1L_2L_3$ и $A'B'C'$ центрально-симметричны.
2. L_1 , L_2 и L_3 – ортоцентры треугольников $AB'C'$, $BC'A'$ и $CA'B'$ соответственно.
3. а) Центр I вписанной окружности треугольника ABC – ортоцентр треугольника $L_1L_2L_3$.
б) Центр H' окружности $(L_1L_2L_3)$ – ортоцентр треугольника Жергонна.
4. L_1 , L_2 и L_3 – центры вписанных окружностей для треугольников AH_2H_3 , BH_3H_1 и CH_1H_2 соответственно.
5. а) Общие попарные внешние касательные к окружностям, вписанным в треугольники AH_2H_3 , BH_3H_1 и CH_1H_2 , (отличные от сторон треугольника ABC) пересекаются в одной точке – центре H' окружности $(L_1L_2L_3)$.
б) Эти общие внешние касательные параллельны сторонам ортотреугольника $H_1H_2H_3$.
в) Прямые L_1H' , L_2H' и L_3H' перпендикулярны сторонам треугольника ABC .
6. Точки A, B, L_1, L_2 лежат на одной окружности (окружность ω_3).

Аналогично для четвёрок B, C, L_2, L_3 (окружность ω_1) и A, C, L_1, L_3 (окружность ω_2).

7. а) Треугольники $H_1H_2H_3$ и $L_1L_2L_3$ перспективны (прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке).

б) Пусть A_0, B_0 и C_0 – середины сторон BC, CA и AB соответственно. Треугольники $A_0B_0C_0$ и $L_1L_2L_3$ перспективны.

8. Прямая IO является прямой Эйлера для треугольника $A'B'C'$.

9. а) Центр гомотетии треугольников $A'B'C'$ и $L_1L_2L_3$ лежит на прямой IO .

б) Центр описанной окружности треугольника $L_1L_2L_3$ лежит на прямой IO , которая, таким образом, является общей прямой Эйлера для треугольников $A'B'C'$ и $L_1L_2L_3$.

10. Центры O_1, O_2 и O_3 окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 соответственно (см. задачу 6) образуют треугольник, гомотетичный треугольнику $L_1L_2L_3$.

11. а) Центром окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, является точка O .

б) Центр гомотетии треугольников $O_1O_2O_3$ и $L_1L_2L_3$ лежит на прямой IO .

в) Радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, равен $R + r$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

12. Радиальные оси окружности ($O_1O_2O_3$) и окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ образуют треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с центром в точке I .

13. а) Пусть h_1, h_2 и h_3 – центры внеписанных окружностей треугольника ABC . Тогда треугольники $h_1h_2h_3$ и $L_1L_2L_3$ гомотетичны с центром в точке I .

б) Треугольники $h_1h_2h_3$ и $O_1O_2O_3$ гомотетичны с центром на прямой IO .

14. Парные центры внешних гомотетий трёх окружностей из задачи 4 лежат на одной прямой t , перпендикулярной IO .

15. Обозначим парные касательные из задачи 5: l_{12}, l_{23} и l_{31} (индексы прямых соответствуют номерам центров окружностей). Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник H_1BH_3 с прямыми AB и BC через P и Q , а с прямыми l_{23} и l_{12} через P_1 и Q_1 . Пусть P_2 и Q_2 – точки пересечения AB с l_{23} и BC с l_{12} . Тогда прямые PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 пересекаются в одной точке, находящейся на прямой t .

Аналогично и для двух других окружностей, вписанных в соответствующие треугольники.

16. а) Окружности $(L_1B'C')$, $(L_2C'A')$ и $(L_3A'B')$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности $(L_1L_2L_3)$.

б) Окружности $(A'L_2L_3), (B'L_3L_1)$ и $(C'L_1L_2)$ пересекаются в одной точке, лежащей на вписанной окружности треугольника ABC .

в) Окружности $(L_1H_2H_3), (L_2H_3H_1)$ и $(L_3H_1H_2)$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности $(L_1L_2L_3)$.

17. а) Точки A', H_1, L_2 и L_3 лежат на одной окружности, проходящей через точку Фейербаха (точку касания вписанной окружности и окружности девяти точек).

Аналогично для четвёрок B', H_2, L_1, L_3 и C', H_3, L_1, L_2 .

б) Центры трех окружностей, определенных в пункте а), образуют треугольник $S_1S_2S_3$, подобный треугольнику ABC .

в) Треугольники $S_1S_2S_3$ и ABC имеют общий центр вписанной окружности.

г) Треугольники $S_1S_2S_3$ и $A_0B_0C_0$ (см. задачу 7б) имеют общий центр описанной окружности.